

SÉRIE A, N° 1003

N° D'ORDRE : 1027

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(Mention Sciences)

PAR

Laurent CAIRO-JUBANY

1^{re} THÈSE. — « Méthodes d'approximation pour
l'étude des ondes électromagnétiques
guidées dans un milieu gyro-
électrique ».

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 mars 1962 devant la Commission d'examen.

MM. DE BROGLIE	<i>Président.</i>
DESTOUCHES	} <i>Examineurs.</i>
ARNOUS	
KAHAN	

Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique

Editions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*
3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres
PARIS (15^e)

1966



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : CAIRO-JUBANY

Prénom : Laurent

Date de la soutenance : 7 mars 1962

Numéro d'ordre : Série A, 1003, N° 1027

CAIRO-JUBANY (Laurent). —

Méthodes d'approximation pour l'étude des ondes électromagnétiques guidées dans un milieu gyroélectrique. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 36 p., 5 fig.

Th. Doctorat d'Université, Paris, 1966, Série A, 1003, N° 1027.

CAIRO-JUBANY (Laurent). —

Méthodes d'approximation pour l'étude des ondes électromagnétiques guidées dans un milieu gyroélectrique. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 36 p., 5 fig.

Th. Doctorat d'Université, Paris, 1966, Série A, 1003, N° 1027.

CAIRO-JUBANY (Laurent). —

Méthodes d'approximation pour l'étude des ondes électromagnétiques guidées dans un milieu gyroélectrique. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 36 p., 5 fig.

Th. Doctorat d'Université, Paris, 1966, Série A, 1003, N° 1027.

CAIRO-JUBANY (Laurent). —

Méthodes d'approximation pour l'étude des ondes électromagnétiques guidées dans un milieu gyroélectrique. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 36 p., 5 fig.

Th. Doctorat d'Université, Paris, 1966, Série A, 1003, N° 1027.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(Mention Sciences)

PAR

Laurent CAIRO-JUBANY

1^{re} THÈSE. — « Méthodes d'approximation pour
l'étude des ondes électromagnétiques
guidées dans un milieu gyro-
électrique ».

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 mars 1962 devant la Commission d'examen.

MM. DE BROGLIE	<i>Président.</i>
DESTOUCHES	} <i>Examineurs.</i>
ARNOUS	
KAHAN	

Ouvrage publié avec le concours
du Centre National de la Recherche Scientifique

Editions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1966

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	DUGUE	T	Statistiques mathématiques.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	SOULAIRAC	T	Psychophysologie.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	ULRICH	T	Physiologie végétale.
PREVOST	T	Chimie organique.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appl.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
WYART	T	Minéralogie et Cristal.	CHAFEAUD	T	Botanique.
TEISSIER	T	Zoologie.	M ^{lle} LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay).	SALEM	T	Mathématiques générales.
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	LELONG	T	Appl. de l'analyse à la géométrie.
MONNIER	T	Physiologie Générale.	DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comp.
PIVETEAU	T	Paléontologie.	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).	FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).	GLANGEAUD	T	Géographie phys. et Géologie dynamique.
LAFFITE	T	Chimie générale.	GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.).
FAVARD	T	Géométrie supérieure.	PISOT	T	Tech. mathém. de la phys.
COULOMB	T	Physique du Globe.	ROCH	T	Géologie.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie Animale (S. P. C. N.).	SCHATZMAN	T	Astrophysique.
CHRETIEN	T	Chimie minérale.	TERMIER	T	Paléontologie stratig.
DRACH	T	Zoologie.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).	LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
EPURUSI	T	Génétique.	RIZET	T	Génétique (Orsay).
RIVIÈRE.	T	Géologie S. P. C. N. et sédim.	ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P. C. B.).	M ^{me} TONNELAT	T	Physique Théorique.
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.	DIXMIER	T	Mathématiques (M. P. C.).
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.	SOUCHAY	T	Chimie générale.
ARNULF	T	Optique appliquée.	AIGRAIN	T	Electrotechnique gén.
MORAND	T	Physique Enseignement.	BRUSSET	T	Chimie systématique.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).	M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
FORTIER	T	Mécanique exp. des Fluides.	M ^{me} CHAIX	T	Chimie biologique.
DANJON	T	Astronomie.	M ^{me} HUREL-PY	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PETIT	T	Biologie maritime.	PIAUX	T	Chimie (M. P. C.).
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides.
GALLIEN	T	Embryologie.	LEDERER	T	Chimie biologique.
EICHORN	T	Botanique.	M ^{me} DUBREIL	T	Mathém. (Agrégation).
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	M ^{me} LELONG	T	Mathématiques (E. N. S.).
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
THELLIER	T	Physique du Globe.	COTTE	T	Physique électricité.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).	DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).	LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
PONCIN	T	Mécanique générale.	MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.	OLMER	T	Energétique générale.
QUELET	T	Chimie organique.	ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.	BARCHIEWITZ	T	Chimie physique.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.	BROSSEL	T	Physique atomique.
JUNG	T	Pétrographie.	BUSER	T	Physiologie comparée.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.	CAMUS	T	Physiologie Vég. B. M. P. V.
WIEMANN	T	Chimie organique et struc.	CASTAING	T	Physique (Orsay).
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).	CURIEN	T	Minéralo. et cristallog.
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.	MOYSE	T	Physiologie vég. (Orsay).
DESTOUCHES	T	Théories Physiques.	NOIROT	T	Evolution des Êtres Org.
AMIEL	T	Chimie générale.	PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
HOCART	T	Minéralogie et Cristallog.	POSSOMPS	T	Zoologie.
J. P. MATHIEU	T	Physique (Optique).	PULLMANN	T	Chimie théorique.
COUTEAUX	T	Biologie animale (P. C. B.).	TEILLAC	T	Physique nucl. et radio-activité.
MAY	T	Zoologie (Orsay).	TONNELAT	T	Biologie physico-chim.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.	VILLE	T	Econometrie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.	WILLEMART	T	Chimie (P. C. B.).
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).	DODE	T	Chimie (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.	FREYMANN	T	Recherches Physiques.
FORTET	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	GUINCHET	T	Biol. Vég. S. P. C. N. (Orsay).
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral.	ROLLET	T	Chimie (P. C. B.).
CHOUARD	T	Physiologie végétale.	M ^{lle} JOSIEN	T	Chimie S. P. C. N.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. aéronaut.).	CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.	ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
NORMANT	T	Synthèse organique générale.	CHAPPELLE	T	Physique (Orsay).
BENARD	T	Chimie minérale.	DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).
			DENY	T	Mathématiques gén. Orsay.
			GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides.
			LUCAS G.	T	Géologie.
			ALLARD	T	Chimie physique.

(suite en dernière page)

A MES PARENTS



MÉTHODES D'APPROXIMATION POUR L'ÉTUDE DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES GUIDÉES DANS UN MILIEU GYROÉLECTRIQUE

PAR

Laurent CAIRO

INTRODUCTION

Il est bien connu que, dans les gaz ionisés, tels que l'ionosphère et les décharges en tubes, un champ magnétique constant produit une anisotropie de la permittivité électrique lorsqu'un champ alternatif électromagnétique est appliqué [1]. Les éléments du tenseur de permittivité $\hat{\epsilon}$ sont des fonctions de la fréquence angulaire ω , de l'intensité du champ magnétique H_0 , de la fréquence de collision ν et de la densité électronique. En même temps la perméabilité magnétique μ reste en général scalaire et présente seulement une petite variation.

Ces milieux ionisés ou plasmas froids ont reçu le nom de milieux gyroélectriques [1 à 3] à la différence des milieux qui, dans les mêmes conditions, ont une perméabilité tensorielle du même type et une permittivité scalaire. On désigne ces derniers par le nom de gyromagnétiques ⁽¹⁾ (ferrites). Les milieux qui possèdent à la fois une permittivité et une perméabilité tensorielles du type indiqué plus haut s'appellent gyrotropes [2].

On s'est intéressé depuis quelque temps à l'étude des ondes guidées dans ces milieux. Les études relatives aux guides circulaires ont été faites en particulier par Shul & Walker [5], Gamo [6] et van Trier [3]. Dans tous les cas, le milieu était supposé sans pertes, hypothèse assez raisonnable dans un milieu gyroélectrique car pour les grandes fréquences les pertes sont petites sauf dans le voisinage des résonances. Pour les guides d'onde de section circulaire complètement remplis du milieu gyroélectrique, Suhl & Walker [5] ont été les premiers à donner l'équation caractéristique qui établit le rapport entre les constantes de propagation des différents modes et la fréquence de l'onde électromagnétique. L'effet Faraday a été étudié expérimentalement par Goldstein [4, 7] et ses collaborateurs. Van Trier [3] a traité le cas plus général du milieu gyrotrope remplissant une zone coaxiale du guide ; cependant l'équation caractéristique qu'il en déduit est assez peu maniable en raison de sa complexité.

(1) Il y a cependant des auteurs qui désignent les deux milieux par le même mot de gyromagnétique [4, 5].

Pour lever cette difficulté, les méthodes d'approximation sont utiles. La méthode des perturbations est en particulier utile lorsque les pertes dans le milieu sont petites [5]. Cependant cette restriction peut être trop large lorsqu'il s'agit de trouver ce qu'on appelle les « paramètres du plasma » : la densité électronique, la fréquence de collision et leur distribution. Cette difficulté peut être surmontée au moyen des principes variationnels obtenus par W. Hauser à partir des travaux de Schwinger [8, 9]. Les deux méthodes ont été déjà utilisées par différents auteurs dans les problèmes concernant les ferrites [5, 8, 10]. On prend comme point de départ une situation où le problème de propagation est déjà résolu. On calcule ensuite la perturbation produite dans la constante de propagation par des petits changements dans l'état initial du système.

On fera, dans le chapitre I, un exposé de la méthode des perturbations et du processus qui conduit au principe variationnel. Le chapitre II concerne le cas de la propagation dans un milieu gyroélectrique infini. L'effet Faraday sera considéré en particulier. On fera ensuite dans le chapitre III une application de la méthode des perturbations à différentes situations dans des guides circulaires. Le chapitre IV sera consacré aux guides rectangulaires.

Les résultats seront indiqués en fonction des éléments du tenseur de permittivité sans exprimer leur valeur. Aucun résultat numérique ne sera donné.

Je remercie vivement M^r le Professeur Louis de Broglie qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être le président du Jury. Mes remerciements vont aussi à M^{rs} les Professeurs J.-L. Destouches et E. Arnous qui ont accepté d'en faire partie, ainsi qu'à M^r T. Kahan qui a suggéré ce travail, pour ses conseils et l'intérêt qu'il a bien voulu lui porter.

NOTATIONS

a , coordonnée du centre de la « lame » de plasma dans le guide rectangulaire.

A , scalaire.

A^* , complexe conjuguée de A .

$|A| = + \sqrt{A A^*}$.

$\vec{A}$, vecteur (matrice colonne).

$\vec{A}^+$, vecteur (matrice ligne) conjugué de $\vec{A}$.

$\vec{A}^T$, vecteur transposé de $\vec{A}$ (matrice ligne).

$\vec{A}\vec{B}$, dyade.

$\vec{A} \cdot \vec{B}$, produit scalaire.

$\vec{A} \wedge \vec{B}$, produit vectoriel.

$\overleftrightarrow{A}$, tenseur 3×3 ou dyade.

$\overleftrightarrow{A}^T$, tenseur transposé de $\overleftrightarrow{A}$.

$\vec{B}$, induction magnétique.

$\vec{D}$, induction électrique.

$\vec{d} = \nabla_t + \gamma \vec{k}$.

$\vec{E}$, champ électrique.

$\vec{E}_t, E_z$, composantes transversale et longitudinale du champ électrique.

$\vec{E}_n, \vec{E}_{nm}, \vec{F}_n(\vec{r})$, modes électriques solénoïdaux.

$F(x) = x \mathbf{J}_1(x)/\mathbf{J}_1(x)$.

$f_n(\vec{r})$, modes électriques irrotationnels.

$\vec{H}_n, \vec{H}_{nm}, \vec{G}_n(\vec{r})$, modes magnétiques solénoïdaux.

$g_n(\vec{r})$, modes magnétiques irrotationnels.

$\vec{H}$, champ magnétique.

$\vec{H}_0$, champ magnétique statique.

$\vec{H}_t, H_z$, composantes transversale et longitudinale du champ magnétique.

$\vec{I}$, tenseur unité.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, vecteurs unités du système cartésien rectangulaire.

i , unité imaginaire.

$J_n(x)$, fonction de Bessel de première espèce.

$$J_n^e = \frac{\omega^2 \mu_0}{\beta_n \Lambda_n^2} \left[\int_S \vec{E}_n^+ \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS + (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int_S \vec{H}_n^+ \cdot \mu' \vec{H} dS \right].$$

$$J_n^m = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{\alpha_n \lambda_n^2} \left[\int_S \vec{H}_n^+ \cdot \mu' \vec{H} dS + (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int_S \vec{E}_n^+ \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS \right].$$

$$K = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma_0^2)^{1/2}.$$

$$K_p = (\omega^2 \varepsilon_2 \mu + \gamma_0^2)^{1/2}.$$

l, L , largeurs de la lame et du guide rectangulaire.

$\vec{M}_t, M_z$, composantes transversale et longitudinale de l'aimantation.

$\vec{M}(x, x')$, fonction dyadique de Green magnétique.

$\vec{N}(x, x')$, fonction dyadique de Green électrique.

$\vec{n}$, vecteur unitaire normal à la surface.

$\vec{P}_t, P_z$, composantes transversale et longitudinale de la polarisation électrique.

r_0, r_1 , rayons du guide circulaire et du tube coaxial.

S , section droite du guide.

S' , partie de cette section correspondant au milieu anisotrope (gyroélectrique).

$$\vec{x} = x \vec{i} + y \vec{j}.$$

$Y_n(x)$, fonction de Bessel de deuxième espèce.

α , constante d'atténuation.

$\sqrt{\alpha_n}$, constante de proportionnalité entre $\vec{H}_n$ et $\vec{G}_n$.

$\beta, \bar{\beta}$, constante de phase et constante de phase normalisée.

β_0 , constante de phase de l'onde qui se propage dans le vide.

$\sqrt{\beta_n}$, constante de proportionnalité entre $\vec{E}_n$ et $\vec{F}_n$.

γ , constante de propagation.

γ_n , constante de propagation du mode n .

$\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, fonction de Dirac.

ε_0 , permittivité du vide.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$, éléments de la diagonale principale du tenseur de permittivité.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$, éléments normalisés.

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 - n \gamma.$$

$\vec{\varepsilon}$, tenseur de permittivité.

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}' = \overleftrightarrow{\varepsilon} - \varepsilon_0 \overleftrightarrow{I}.$$

η , élément extérieur à la diagonale principale du tenseur de permittivité.

$\overline{\eta}$, élément normalisé.

η_n , constante de normalisation des modes $\overrightarrow{g}_n(\vec{r})$.

λ_n , constante de normalisation des modes $\overrightarrow{G}_n(\vec{r})$.

Λ_n , constante de normalisation des modes $\overrightarrow{F}_n(\vec{r})$.

$$\Lambda = \left[\frac{\varepsilon_0}{K^2} S(K r_1) - \frac{\varepsilon_2}{K_p^2} F(K_p r_1) \right] / \left[\frac{\beta}{\omega} \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K_q^2} \right) \right].$$

$\overline{\Lambda}$, Λ' , valeurs de Λ normalisées.

μ_0 , perméabilité du vide.

μ , $\overline{\mu}$, perméabilité du milieu gyroélectrique et perméabilité normalisée.

$$\mu' = \mu - \mu_0.$$

ω , fréquence angulaire.

Ω_n , constante de normalisation des modes $\overrightarrow{f}_n(\vec{r})$.

I. Méthodes d'approximation

1. Expression de la constante de propagation d'après le calcul des perturbations.

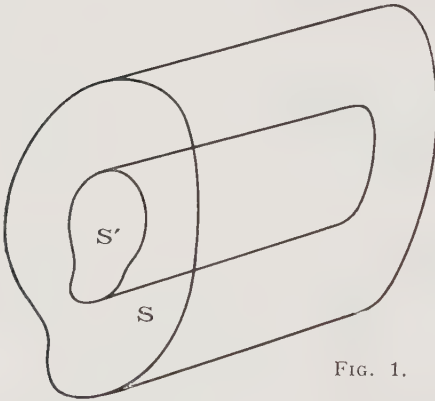


FIG. 1.

— Le problème de la propagation dans un guide d'onde cylindrique de section droite S (fig. 1), rempli partiellement ou complètement par une baguette infinie de section droite uniforme S' , permet la séparation par rapport à la coordonnée de l'axe du guide, axe z de notre système de coordonnées. En supposant que le temps intervient sous la forme $\exp(\mathbf{i} \omega t)$, le champ électromagnétique peut s'exprimer comme

$$(I.1) \quad \begin{aligned} & \overrightarrow{E}(x, y) \exp(\mathbf{i} \omega t - \gamma z), \\ & \overrightarrow{H}(x, y) \exp(\mathbf{i} \omega t - \gamma z), \end{aligned}$$

où γ , la constante de propagation, est en général une quantité complexe ($\gamma = \alpha + \mathbf{i} \beta$).

En fonction de $\overrightarrow{E}(x, y)$ et $\overrightarrow{H}(x, y)$, parties indépendantes de z du champ électromagnétique, les équations de Maxwell peuvent s'écrire, dans une région dépourvue de charges et de courants,

$$(I.2) \quad \begin{aligned} (\nabla_t - \gamma \vec{k}) \wedge (\overrightarrow{E}_t + \overrightarrow{E}_z) &= -\mathbf{i} \omega (\mu_0 \overrightarrow{H}_t + \overrightarrow{M}_t) + (\mu_0 \overrightarrow{H}_z + \overrightarrow{M}_z), \\ (\nabla_t - \gamma \vec{k}) \wedge (\overrightarrow{H}_t + \overrightarrow{H}_z) &= \mathbf{i} \omega (\varepsilon_0 \overrightarrow{E}_t + \overrightarrow{P}_t) + (\varepsilon_0 \overrightarrow{E}_z + \overrightarrow{P}_z). \end{aligned}$$

En séparant les parties longitudinales et transversales,

$$(I.3a) \quad \nabla_t \wedge \overrightarrow{E}_z - \gamma \vec{k} \wedge \overrightarrow{E}_t + \mathbf{i} \omega \mu_0 \overrightarrow{H}_t = -\mathbf{i} \omega \overrightarrow{M}_t,$$

$$(I.3b) \quad \nabla_t \wedge \overrightarrow{H}_z - \gamma \vec{k} \wedge \overrightarrow{H}_t - \mathbf{i} \omega \varepsilon_0 \overrightarrow{E}_t = \mathbf{i} \omega \overrightarrow{P}_t,$$

$$(I.4a) \quad \nabla_t \wedge \overrightarrow{E}_t + \mathbf{i} \omega \mu_0 \overrightarrow{H}_z = -\mathbf{i} \omega \overrightarrow{M}_z,$$

$$(I.4b) \quad \nabla_t \wedge \overrightarrow{H}_t - \mathbf{i} \omega \varepsilon_0 \overrightarrow{E}_z = \mathbf{i} \omega \overrightarrow{P}_z,$$

où les membres de droite tiennent compte de l'aimantation et de la polarisation

que représente la perturbation causée par l'introduction du milieu gyroélectrique dans le guide d'onde. Les membres de gauche contiennent le champ perturbé. Ces champs peuvent être développés en modes normaux du système non perturbé. Les champs modes normaux $\vec{E}_{tn} \exp(-i\beta_n z)$, $\vec{H}_{tn} \exp(-i\beta_n z)$ satisfont la forme non perturbée des équations (I.3) et (I.4), c'est-à-dire, lorsque le membre de droite est nul.

On a donc

$$(I.5) \quad \vec{E}_t = \sum_n a_n \vec{E}_{tn}, \quad \vec{H}_t = \sum_n b_n \vec{H}_{tn}.$$

$\vec{E}_z$ et $\vec{H}_z$ peuvent être éliminés entre (I.3) et (I.4), donnant

$$(I.6a) \quad \frac{\nabla_t \wedge (\nabla_t \wedge \vec{H}_t - i\omega \vec{P}_z)}{i\omega \varepsilon_0} - \gamma \vec{k} \wedge \vec{E}_t + i\omega \mu_0 \vec{H}_t = -i\omega \vec{M}_t,$$

$$(I.6b) \quad \frac{\nabla_t \wedge (\nabla_t \wedge \vec{E}_t + i\omega \vec{M}_z)}{i\omega \mu_0} + \gamma \vec{k} \wedge \vec{H}_t + i\omega \varepsilon_0 \vec{E}_t = -i\omega \vec{P}_t.$$

Aussi pour le mode normal n,

$$(I.7a) \quad \frac{\nabla_t \wedge (\nabla_t \wedge \vec{H}_{tn})}{i\omega \varepsilon_0} - i\beta_n \vec{k} \wedge \vec{E}_{tn} + i\omega \mu_0 \vec{H}_{tn} = 0,$$

$$(I.7b) \quad \frac{\nabla_t \wedge (\nabla_t \wedge \vec{E}_{tn})}{i\omega \mu_0} + i\beta_n \vec{k} \wedge \vec{H}_{tn} + i\omega \varepsilon_0 \vec{E}_{tn} = 0,$$

où β_n est la constante de phase du mode normal n. En substituant les équations (I.5) et (I.7) dans (I.6),

$$(I.8a) \quad \sum_n (i\beta_n b_n - \gamma a_n) \vec{k} \wedge \vec{E}_{tn} = -i\omega \vec{M}_t + \frac{\nabla_t \wedge \vec{P}_z}{\varepsilon_0},$$

$$(I.8b) \quad \sum_n (i\beta_n a_n - \gamma b_n) \vec{k} \wedge \vec{H}_{tn} = i\omega \vec{P}_t + \frac{\nabla_t \wedge \vec{M}_z}{\mu_0}.$$

La condition d'orthogonalité

$$\int_S \vec{k} \cdot \vec{E}_{tm} \wedge \vec{H}_{tn}^+ dS = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \Delta_n & \text{si } m = n \text{ (réel)} \end{cases}$$

peut maintenant s'appliquer. En multipliant (I.8a) par $\vec{H}_{tm}^+$ et l'équation conjuguée de (I.8b) par $\vec{E}_{tm}$ et intégrant sur la section droite S du guide, on a

$$(I.9a) \quad \sum_n (i\beta_n b_n - \gamma a_n) \int_{S'} \vec{k} \cdot \vec{E}_{tn} \wedge \vec{H}_{tm}^+ dS' = \\ = -i\omega \int_{S'} \vec{H}_{tm}^+ \cdot \vec{M}_t dS' + \int_{S'} \vec{H}_{tm}^+ \cdot \frac{\nabla_t \wedge \vec{P}_z}{\varepsilon_0} dS',$$

$$(I.9b) \quad \sum_n (i\beta_n a_n^* + \gamma^* b_n^*) \int_{S'} \vec{k} \cdot \vec{E}_{tm} \wedge \vec{H}_{tn}^+ dS' = \\ = -i\omega \int_{S'} \vec{E}_{tm} \cdot \vec{P}_t^+ dS' + \int_{S'} \vec{E}_{tm} \cdot \frac{\nabla_t \wedge \vec{M}_z^+}{\mu_0} dS',$$

$$(I.10a) \quad (i\beta_n b_n - \gamma a_n) = \frac{1}{\Delta_n} \left(-i\omega \int_{S'} \vec{H}_{tn}^+ \cdot \vec{M}_t dS' + \int_{S'} \vec{H}_{tn}^+ \cdot \frac{\nabla_t \wedge \vec{P}_z}{\varepsilon_0} dS' \right),$$

$$(I.10b) \quad (i\beta_n a_n^* + \gamma^* b_n^*) = \frac{1}{\Delta_n} \left(-i\omega \int_{S'} \vec{E}_{tn} \cdot \vec{P}_t^+ dS' + \int_{S'} \vec{E}_{tn} \cdot \frac{\nabla_t \wedge \vec{M}_z^+}{\mu_0} dS' \right).$$

En faisant usage de l'identité

$$\int_{S_0} \vec{G}_t \cdot \nabla_t \wedge F \vec{k} dS = \int_{S_0} F \vec{k} \cdot \nabla \wedge \vec{G}_t dS - \oint F \vec{G}_t \cdot d\vec{l},$$

où l'intégrale de ligne est prise sur le contour de la surface S_0 (qui est contenu dans le plan transverse), il s'ensuit

$$\begin{aligned} \int_{S'} \vec{H}_{tn}^+ \cdot \nabla_t \wedge \vec{P}_z dS &= \int_{S'} \vec{P}_z \cdot \nabla_t \wedge \vec{H}_{tn}^+ dS - \oint P_z \vec{H}_{tn}^+ \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{S'} \vec{P}_z \cdot \nabla_t \wedge \vec{H}_{tn}^+ dS, \end{aligned}$$

car $P_z = 0$ à l'extérieur du milieu gyroélectrique. La surface d'intégration dans les équations (I.9) et (I.10) est celle de la section droite d'un guide d'onde et, par conséquent, l'intégrale de ligne est prise sur la périphérie du guide. L'intégrale de surface existe seulement dans la région du milieu gyroélectrique S' . Si S' et S coïncident, l'équation est encore valable car $E_z = 0$ sur la périphérie du guide.

Or $\nabla_t \wedge \vec{H}_{tn}^+ = -i \omega \varepsilon_0 \vec{E}_{zn}^+$; donc

$$\int_{S'} \vec{H}_{tn}^+ \cdot \frac{\nabla_t \wedge \vec{P}_z}{\varepsilon_0} dS = -i \omega \int_{S'} P_z E_{zn}^* dS'.$$

D'une manière analogue,

$$\int_{S'} \vec{E}_{tn} \cdot \frac{\nabla_t \wedge \vec{M}_z^+}{\mu_0} dS = -i \omega \int_{S'} M_z^* H_{zn} dS'.$$

Les équations (I.10a) et (I.10b) deviennent

$$(I.11a) \quad i \beta_n b_n - \gamma a_n = \frac{-i \omega}{\Delta_n} \left[\int_{S'} (\vec{H}_{tn}^+ \cdot \vec{M}_t + E_{zn}^* P_z) dS' \right],$$

et

$$(I.11b) \quad i \beta_n a_n^* + \gamma^* b_n^* = \frac{-i \omega}{\Delta_n} \left[\int_{S'} (\vec{E}_{tn} \cdot \vec{P}_t^+ + H_{zn} M_z^*) dS' \right];$$

étant donné que Δ_n est réel, la conjuguée de l'équation (I.11b) est

$$(I.11b') \quad i \beta_n a_n - \gamma b_n = \frac{-i \omega}{\Delta_n} \left[\int_{S'} (\vec{E}_{tn}^+ \cdot \vec{P}_t + H_{zn}^* M_z) dS' \right].$$

Réécrivons (I.11a) et (I.11b') comme il suit :

$$i \beta_n b_n - \gamma a_n = \mathcal{L}, \quad i \beta_n a_n - \gamma b_n = \mathcal{M},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{i \omega}{\Delta_n} \int_{S'} (\vec{H}_{tn}^+ \cdot \vec{M}_t + E_{zn}^* P_z) dS', \\ \mathcal{M} &= -\frac{i \omega}{\Delta_n} \int_{S'} (\vec{E}_{tn}^+ \cdot \vec{P}_t + H_{zn}^* M_z) dS'. \end{aligned}$$

Si $\gamma = i \beta_n + \delta \gamma$, il résulte $\delta \gamma = -(\mathcal{L} + \mathcal{M})/(a_n + b_n)$ et si on introduit $2 \delta \gamma = (a_n + b_n) \bar{\delta \gamma}$ on a finalement, toutes substitutions faites,

$$(I.12) \quad \delta \gamma = \frac{i \omega}{2 \Delta_n} \left[\int_{S'} (\vec{H}_{tn}^+ \cdot \vec{M}_t + H_{zn}^* M_z + \vec{E}_{tn}^+ \cdot \vec{P}_t + E_{zn}^* P_z) dS' \right].$$

2. Equations intégrales du champ électromagnétique. — Soit les équations de Maxwell

$$(I.13) \quad (\nabla_t - \gamma \vec{k}) \wedge \vec{E} = -\mathbf{i} \omega \mu \vec{H}, \quad (\nabla_t - \gamma \vec{k}) \wedge \vec{H} = \mathbf{i} \omega \vec{\varepsilon} \vec{E},$$

où $\vec{\varepsilon}$ est le tenseur de permittivité électrique et μ est la perméabilité magnétique du milieu gyroélectrique introduit dans le guide. Comme d'habitude, appliquant le rotationnel aux équations de Maxwell, il résulte les équations d'onde satisfaites par $\vec{E}$ et $\vec{H}$. On a

$$(I.14a) \quad \vec{d} \wedge \vec{d} \wedge \vec{E} - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = \omega^2 \mu_0 (\vec{\varepsilon}' \vec{E}) - \mathbf{i} \omega \vec{d} \wedge (\mu' \vec{H}),$$

$$(I.14b) \quad \vec{d} \wedge \vec{d} \wedge \vec{H} - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \vec{H} = \omega^2 \varepsilon_0 (\mu' \vec{H}) + \mathbf{i} \omega \vec{d} \wedge (\vec{\varepsilon}' \vec{E}),$$

où $\vec{d} = \nabla_t - \gamma \vec{k}$, $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \vec{I} + \vec{\varepsilon}'$, $\mu = \mu_0 + \mu'$, $\vec{I}$ étant la dyade unitaire et ε_0 , μ_0 les constantes du vide.

De la forme des équations de Maxwell, on déduit que les conditions aux limites de $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ et $\vec{D}$ ne sont pas affectées par l'introduction du tenseur $\vec{\varepsilon}$. A travers la surface où $\vec{\varepsilon}$ ou μ , ou même les deux à la fois, changent discontinûment, les composantes tangentielle de $\vec{E}$, $\vec{H}$ et les composantes normales de $\vec{B}$, $\vec{D}$ sont continues. A la surface d'un conducteur les composantes tangentielle de $\vec{E}$ et les composantes normales de $\vec{B}$ sont nulles.

A ce point, introduisons les champs transposés $\vec{E}^T$ et $\vec{H}^T$, qui satisfont les équations

$$(I.15) \quad \begin{aligned} \vec{d}^T \wedge \vec{E}^T &= \mathbf{i} \omega \vec{H}^T \mu = \mathbf{i} \omega \vec{B}^T, \\ \vec{d}^T \wedge \vec{H}^T &= -\mathbf{i} \omega \vec{E}^T \vec{\varepsilon} = -\mathbf{i} \omega \vec{D}^T, \end{aligned}$$

où $\vec{d}^T = \nabla_t + \gamma \vec{k}$ est tel que si γ est imaginaire pur, alors $\vec{d}^T = \vec{d}^\dagger$.

Nous conviendrons d'appeler *champ transposé* le champ associé aux opérateurs transposés ou encore le champ solution des équations d'onde transposées.

A partir des équations (I.13), on peut définir des opérateurs de champ $\vec{\mathcal{L}}_E$ et $\vec{\mathcal{L}}_H$ tels que $\vec{\mathcal{L}}_E \vec{E} = 0$, $\vec{\mathcal{L}}_H \vec{H} = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_E &\equiv \vec{d} \wedge (\mu^{-1} \vec{d} \wedge) - \omega^2 (\varepsilon_0 + \vec{\varepsilon}'), \\ \vec{\mathcal{L}}_H &\equiv \vec{d} \wedge (\vec{\varepsilon}^{-1} \vec{d} \wedge) - \omega^2 (\mu_0 + \mu'). \end{aligned}$$

Les équations (I.15) nous permettent d'introduire des opérateurs transposés $\vec{\mathcal{L}}_E^T$, $\vec{\mathcal{L}}_H^T$ qui, dans le cas où μ est scalaire, s'obtiennent à partir de $\vec{\mathcal{L}}_E$ et $\vec{\mathcal{L}}_H$ en prenant pour $\vec{\varepsilon}$ la dyade transposée $\vec{\varepsilon}^T$. Le champ électromagnétique transposé satisfait la propriété fondamentale que doit vérifier tout vecteur transposé. Ainsi pour le champ électrique on a

$$\int_S \vec{E}^T \cdot (\vec{\mathcal{L}}_E \vec{E}) dS = \int_S (\vec{\mathcal{L}}_E^T \vec{E}^T) \cdot \vec{E} dS$$

et de même pour le champ magnétique.

Pour prouver ceci il faut tenir compte de la relation

$$\int_S \vec{A} \cdot (\vec{d} \wedge \vec{B}) dS = \int_S (\vec{d}^T \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} dS,$$

où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont du type électromagnétique et fonctions des deux variables transverses x , y . Cette relation est satisfaite avec la définition adoptée pour $\vec{d}^T$, comme on peut le voir facilement compte tenu des conditions aux limites du guide métallique et de la relation (théorème) de Green :

$$\nabla_t \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla_t \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla_t \wedge \vec{B}).$$

Dans un milieu non dissipatif où $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ est hermitique, $\gamma = i\beta$ (β réel) et $\overrightarrow{E}^T = \overrightarrow{E}^+$, $\overrightarrow{H}^T = \overrightarrow{H}^+$.

Considérons maintenant le problème d'un guide d'onde de section droite S avec une région S' occupée par un matériau de propriétés tensorielles électromagnétiques (fig. 1), par exemple un milieu gyroélectrique ou gyromagnétique. Il s'agit de résoudre les équations (I.13) dans les deux régions avec les conditions limites établies. Pour cela on fait usage de la fonction dyadique de Green qui vérifie l'équation différentielle

$$(I.16) \quad \overrightarrow{d}^T \wedge \overrightarrow{d}^T \wedge \overleftrightarrow{Z}^T(\vec{x}, \vec{x}') - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \overleftrightarrow{Z}^T(\vec{x}, \vec{x}') = \overrightarrow{I} \delta(\vec{x}, \vec{x}')$$

dans le guide, où $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(x - x') \delta(y - y')$. On exige que $\overleftrightarrow{Z}^T$ satisfasse à des conditions aux limites du guide, analogues à celles du champ électromagnétique. La fonction de Green $\overleftrightarrow{N}^T(\vec{x}, \vec{x}')$, qui satisfait la condition

$$(I.17) \quad \vec{n} \wedge \overleftrightarrow{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') = 0$$

lorsque $\vec{x}$ est dans la périphérie du guide, porte le nom de « fonction dyadique de Green électrique ». D'une manière analogue la fonction dyadique de Green $\overleftrightarrow{M}^T(\vec{x}, \vec{x}')$ qui vérifie la condition

$$(I.18) \quad \vec{n} \wedge [\overrightarrow{d}^T \wedge \overleftrightarrow{M}^T(\vec{x}, \vec{x}')] = 0$$

lorsque $\vec{x}$ est dans la périphérie du guide, s'appelle « fonction dyadique de Green magnétique ».

Finalement dans le cas où $\overrightarrow{E}$ ou $\overrightarrow{H}$ sont à divergence nulle, on exige que la fonction de Green correspondante satisfasse à la condition

$$(I.19) \quad \overrightarrow{d}^T \overleftrightarrow{Z}^T(\vec{x}, \vec{x}') = 0.$$

Avec ceci et en faisant usage des propriétés intégrales des fonctions de Green on obtient, à partir de (I.14a), (I.16) et (I.17),

$$(I.20a) \quad \overrightarrow{E}(\vec{x}') = \omega^2 \mu_0 \int_S \overleftrightarrow{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \overleftrightarrow{\varepsilon}' \overrightarrow{E}(\vec{x}) dS - \\ - i \omega \int_S [\overrightarrow{d}^T \wedge \overleftrightarrow{N}^T(\vec{x}, \vec{x}')] \mu' \overrightarrow{H}(\vec{x}) dS.$$

De même, à partir de (I.14b), (I.16) et (I.18), on obtient

$$(I.20b) \quad \overrightarrow{H}(\vec{x}') = \omega^2 \varepsilon_0 \int_S \overleftrightarrow{M}^T(\vec{x}, \vec{x}') \mu' \overrightarrow{H}(\vec{x}) dS + \\ + i \omega \int_S [\overrightarrow{d}^T \wedge \overleftrightarrow{M}^T(\vec{x}, \vec{x}')] \overleftrightarrow{\varepsilon}' \overrightarrow{E}(\vec{x}) dS.$$

3. Modes normaux électriques. — Pour faciliter la construction explicite des fonctions tensorielles (dyadiques) de Green, il est utile de les développer en fonction des « modes normaux ». Les modes normaux électriques d'une région V limitée par une surface S seront définis comme solutions de l'équation d'ondes homogène

$$(I.21) \quad (\nabla_t \wedge \nabla_t \wedge - k_n^2) \overrightarrow{E}_n = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(I.21') \quad (\nabla_t^2 + k_n^2) \overrightarrow{E}_n = 0,$$

avec la condition

$$(I.22) \quad (\nabla_t + \gamma_n \vec{e}_z) \cdot \vec{E}_n = 0,$$

où $k_n^2 = k^2 + \gamma_n^2$ et $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, γ_n étant la constante de propagation du mode n .

Les modes magnétiques $\vec{H}_n$ satisfont à des équations analogues. Si nous introduisons maintenant les nouveaux modes électriques $\vec{A}_n$ définis par

$$(I.23) \quad \vec{A}_{nt} = \vec{E}_{nt}, \quad A_{nz} = \frac{\gamma_n}{\gamma} E_{nz}$$

et les mêmes pour $\vec{H}_n$, on voit que les $\vec{A}_n$ doivent satisfaire

$$(\nabla_t^2 + k_n^2) \vec{A}_n = 0 \quad \text{ou} \quad [\nabla^2 + (k_n^2 - \gamma^2)] \vec{A}_n = 0$$

et

$$(\nabla_t - \gamma \vec{e}_z) \cdot \vec{A}_n = 0$$

d'où encore ⁽²⁾

$$(I.24) \quad [\vec{d} \wedge \vec{d} \wedge - (k_n^2 - \gamma^2)] \vec{A}_n = 0$$

avec la condition aux limites pour les modes électriques

$$(I.25) \quad \vec{n} \wedge A_n(\vec{x}) = 0, \quad \vec{r} \text{ en } l.$$

Ces champs peuvent seulement exister pour certaines valeurs de k_n et pour chacune des valeurs de k_n il y aura, en général, un nombre fini de champs linéairement indépendants. Il y a quand même une exception : tout champ vectoriel procédant de la fonction scalaire $\varphi(\vec{x})$ telle que

$$(I.26) \quad A_n(\vec{x}) \sim \vec{d}\varphi(\vec{x}),$$

où $\varphi(\vec{x}) = 0$ lorsque $\vec{x}$ est en l , représente une solution de (I.24) correspondant à $k_n^2 = \gamma^2$ ou encore à $k^2 = 0$. Nous désignerons les champs correspondant à chaque valeur $k_n^2 \neq \gamma^2$ par $\vec{F}_n(\vec{x})$ et les champs correspondant à $k_n^2 = \gamma^2$ par $\vec{f}_n(\vec{x})$.

Les champs vectoriels $\vec{F}_n(\vec{x})$ sont orthogonaux entre eux. L'identité vectorielle de Green, appliquée aux deux champs normaux $\vec{F}_n(\vec{x})$ et $\vec{F}_m(\vec{x})$, fournit

$$\begin{aligned} \int_S dS \{ \vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{d} \wedge [\vec{d} \wedge \vec{F}_m(\vec{x})] - \vec{F}_m(\vec{x}) \cdot \vec{d}^T \wedge [\vec{d}^T \wedge \vec{F}_n^T(\vec{x})] \} = \\ = (k_m^2 - k_n^2) \int_S dS \vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{F}_m(\vec{x}) \\ = \int_l dl [(\vec{n} \wedge \vec{F}_m(\vec{x})) \cdot (\vec{d}^T \wedge \vec{F}_n^T(\vec{x})) - (\vec{n} \wedge \vec{F}_n^T(\vec{x})) \cdot (\vec{d} \wedge \vec{F}_m(\vec{x}))] = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(I.27) \quad \int_S dS \vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{F}_m(\vec{x}) = 0 \quad (k_n \neq k_m).$$

Bien que deux champs différents procédant du même k_n ne soient pas automatiquement orthogonaux, on peut toujours trouver une combinaison linéaire de ces modes dégénérés telle que tous les champs $\vec{F}_n(\vec{x})$ soient orthogonaux :

$$(I.27') \quad \int_S dS \vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{F}_m(\vec{x}) = A_n^2 \delta_{nm}.$$

⁽²⁾ Nous aurions pu procéder de la même manière avec les modes transposés qui doivent vérifier

$$(I.24') \quad [\vec{d}^T \wedge \vec{d}^T \wedge - (k_n^2 - \gamma^2)] \vec{A}_n^T = 0.$$

De même

$$(I.28) \quad \int_S dS \vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}) = 0.$$

Il est évidemment désirable de sélectionner pour les $\vec{f}_n(\vec{r})$ un ensemble de fonctions vectorielles orthogonales. Pour cela on fait usage des fonctions scalaires $\varphi_n(\vec{x})$ définies par

$$(I.29) \quad (\vec{d} \cdot \vec{d} + \omega_n^2) \varphi_n(\vec{x}) = 0, \quad \varphi_n(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \text{ en } l.$$

Les fonctions $\varphi_n(\vec{x})$ forment un ensemble complet pour la représentation des fonctions scalaires qui s'annulent sur la périphérie l . Par conséquent, tout champ de la forme (I.26) peut s'obtenir par superposition de l'ensemble de champs vectoriels $\vec{f}_n(\vec{x}) = (1/\omega_n) \vec{d} \varphi_n(\vec{x})$. Dans ces conditions les champs $\vec{f}_n(\vec{x})$ sont orthogonaux. Pour en faire la preuve il suffit d'appliquer à φ_n et φ_m l'identité de Green

$$\begin{aligned} \int_1 dl \vec{n} [\varphi_n^T(\vec{x}) \vec{d} \varphi_m(\vec{x})] &= \int_S dS [\vec{d} \varphi_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{d} \varphi_m(\vec{x}) + \varphi_n^T(\vec{x}) \vec{d} \cdot \vec{d} \varphi_m(\vec{x})] \\ &= \omega_n \omega_m \int_S \vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}) dS - \omega_m^2 \int_S \vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}) dS = 0, \end{aligned}$$

compte tenu des conditions aux limites (I.29). Donc,

$$\omega_m^2 \int_S dS \vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}) = \omega_n \omega_m \int_S dS \vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}).$$

En changeant n en m et en soustrayant la relation adjointe, on a

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_S dS \vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}) = 0,$$

d'où il vient

$$(I.30) \quad \int_S dS \vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_m(\vec{x}) = \Omega_{nm}^2.$$

Il faut remarquer qu'entre les deux modes $\vec{F}_n$ et $\vec{f}_n$ il existe une différence essentielle. En effet, si on évalue la divergence de l'équation de définition (I.24), on trouve

$$(k_n^2 - \gamma^2) \vec{d} \cdot \vec{A}_n(\vec{x}) = 0,$$

donc, pourvu que $k_n^2 \neq \gamma^2$,

$$(I.31) \quad \vec{d} \cdot \vec{F}_n(\vec{x}) = 0,$$

tandis que

$$\vec{d} \cdot \vec{f}_n(\vec{x}) = \frac{1}{\omega_n} \vec{d} \cdot \vec{d} \varphi_n(\vec{x}) = -\omega_n \varphi_n(\vec{x}) \neq 0,$$

mais par contre l'on a

$$(I.32) \quad \vec{d} \wedge \vec{f}_n(\vec{x}) = 0.$$

L'importance des modes normaux électriques est due au fait qu'ils forment un ensemble complet pour la représentation des champs vectoriels de composante tangentielle nulle en l . Les champs $\vec{F}_n(\vec{x})$ constituent un ensemble complet pour la représentation de champs solénoïdaux, tandis que l'ensemble de champs $\vec{f}_n(\vec{x})$ est approprié pour les champs irrotationnels. Les deux ensembles permettent donc de représenter tout champ vectoriel en accord avec les conditions aux limites imposées aux modes normaux.

Il est utile de donner ici l'expression des nouveaux modes en fonction de la composante suivant Oz des modes TE et TM classiques.

D'après la forme des modes TE et TM classiques et compte tenu de la relation (I.23), on peut écrire pour les $\vec{F}_n$:

modes TE,

$$(I.33) \quad \vec{F}_n(x, y, \gamma, \gamma_n, \omega) = \frac{i \mu_0 \omega}{\gamma_n^2 + k^2} \mathbf{k} \wedge \nabla_t H_{nz};$$

modes TM,

$$(I.34) \quad \vec{F}_n(x, y, \gamma, \gamma_n, \omega) = \left(\frac{-\gamma_n}{\gamma_n^2 + k^2} \nabla_t + \frac{\gamma_n}{\gamma} \mathbf{k} \right) E_{nz}.$$

Les modes transposés satisfont les mêmes relations en changeant ω en $-\omega$, γ_n en $-\gamma_n$ et γ en $-\gamma$.

4. Développement des fonctions de Green électriques en modes normaux. —

Les modes normaux électriques peuvent être définis comme l'ensemble des solutions d'une équation intégrale de deuxième espèce

$$(I.35) \quad \vec{F}_n(\vec{x}) = (\gamma_n^2 - \gamma^2) \int_{S'} \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{F}_n(\vec{x}') dS',$$

$$(I.36) \quad \vec{f}_n(\vec{x}) = -k^2 \int_{S'} \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{f}_n(\vec{x}') dS',$$

où $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$. Cette définition est équivalente à (I.24) et (I.25), car

$$\begin{aligned} \vec{d} \wedge \vec{d} \wedge \vec{F}_n(\vec{x}) &= (\gamma_n^2 - \gamma^2) \int_{S'} [k^2 \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') + \vec{I} \delta(\vec{x} - \vec{x}')] \vec{F}_n(\vec{x}') dS' \\ &= k^2 \vec{F}_n(\vec{x}) + (k_n^2 - \gamma^2 - k^2) \vec{F}_n(\vec{x}) = (k_n^2 - \gamma^2) \vec{F}_n(\vec{r}) \end{aligned}$$

et

$$\vec{n} \wedge \vec{F}_n(\vec{x}) = (\gamma_n^2 - \gamma^2) \int_S [\vec{n} \wedge \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}')] \vec{F}_n(\vec{x}') dS = 0 \quad (\vec{x} \text{ en } l).$$

Les équations (I.35) et (I.36) pourraient être obtenues comme d'habitude en appliquant l'identité vectorielle de Green aux vecteurs $\vec{F}_n(\vec{x})$, $\vec{N}^T(\vec{x}', \vec{x})$ et $\vec{f}_n(\vec{x}')$, $\vec{N}^T(\vec{x}', \vec{x})$ et respectivement.

Si, par conséquent, les fonctions dyadiques de Green étaient connues, les modes normaux pourraient être construits directement à partir des équations intégrales (I.35) et (I.36). En réalité ici le procédé est inversé car on va chercher une expression pour le noyau $\vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}')$ de l'équation intégrale, au moyen de ses fonctions caractéristiques $\vec{F}_n(\vec{x})$ et $\vec{f}_n(\vec{x})$. Le vecteur $\vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{e}$, n'ayant pas de composantes tangentielles lorsque $\vec{x}$ est sur le bord l de la surface S , peut donc être développé en modes normaux,

$$(I.37) \quad \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{e} = \sum_n \vec{F}_n^T(\vec{x}) a_n(\vec{x}') + \sum_n \vec{f}_n^T(\vec{x}) b_n(\vec{x}').$$

Les coefficients du développement sont fonctions de $\vec{r}'$ et du vecteur auxiliaire et constant $\vec{e}$. Compte tenu des conditions d'orthogonalité, il vient

$$\begin{aligned} (I.38) \quad a_n(\vec{x}') &= \frac{1}{\Lambda_n^2} \int_S \vec{F}_n(\vec{x}) \cdot \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{e} dS = \\ &= \frac{1}{\Lambda_n^2} \vec{e} \cdot \int_S \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{F}_n(\vec{x}) dS = \frac{\vec{F}_n(\vec{x}') \cdot \vec{e}}{\gamma_n^2 - \gamma^2}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue,

$$(I.39) \quad b_n(\vec{x}') = \frac{\vec{f}_n(\vec{x}') \cdot \vec{e}}{-k^2 \Omega_n^2}.$$

On a donc finalement

$$(I.40) \quad \vec{N}^T(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_n \frac{\vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{F}_n(\vec{x}')}{(\gamma_n^2 - \gamma^2) \Lambda_n^2} - \frac{1}{k^2} \sum_n \frac{\vec{f}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{f}_n(\vec{x}')}{\Omega_n^2}.$$

5. **Modes normaux magnétiques.** — D'une façon tout à fait analogue les modes normaux magnétiques sont définis comme solutions de l'équation vectorielle (I.24) avec les conditions limites

$$(I.41) \quad \vec{n} \wedge [\vec{d} \wedge \vec{A}(\vec{x})] = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \text{ en } l).$$

Il faut aussi distinguer entre deux types de modes normaux, ceux pour qui $k_n^2 \neq \gamma^2$ appelés $\vec{G}_n(\vec{x})$ ou modes solénoïdaux,

$$(I.42) \quad \vec{d} \cdot \vec{G}_n(\vec{x}) = 0$$

et ceux, à rotationnel nul, que nous désignons par $\vec{g}_n(\vec{x})$,

$$(I.43) \quad \vec{d} \wedge \vec{g}_n(\vec{x}) = 0$$

correspondant à $k_n^2 = \gamma^2$.

Entre $\vec{G}_n$ et les composantes longitudinales des modes TE et TM classiques, il y a les relations

$$(I.44) \quad \vec{G}_n(x, y, \gamma, \gamma_n, \omega) = \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + k^2} \nabla_t + \frac{\gamma_n}{\gamma} \vec{k} \right) H_{nz},$$

$$(I.45) \quad \vec{G}_n(x, y, \gamma, \gamma_n, \omega) = \frac{\mathbf{i} \omega \varepsilon_0}{\gamma_n^2 + k^2} \vec{k} \wedge \nabla_t E_{nz}.$$

$\vec{G}_n^T$ satisfait les mêmes relations en changeant ω en $-\omega$, γ_n en $-\gamma_n$ et γ en $-\gamma$.

Moyennant (I.33), (I.34) et (I.44), (I.45), on peut déduire les équations qui relient $\vec{F}_n$ à $\vec{G}_n$:

$$(I.46) \quad \vec{d} \wedge \vec{F}_n = -\mathbf{i} \omega \mu_0 \vec{G}_n \alpha_n,$$

$$(I.47) \quad \vec{d} \wedge \vec{G}_n = \mathbf{i} \omega \varepsilon_0 \vec{F}_n \beta_n,$$

où

$$(I.48) \quad \alpha_n = \begin{cases} \gamma/\gamma_n & \text{pour TE} \\ \frac{\gamma_n k^2 + \gamma_n^2 - \gamma^2}{\gamma k^2} & \text{pour TM} \end{cases}$$

$$(I.49) \quad \beta_n = \begin{cases} \frac{\gamma_n k^2 + \gamma_n^2 - \gamma^2}{\gamma k^2} & \text{pour TE} \\ \gamma/\gamma_n & \text{pour TM} \end{cases}$$

A titre d'exemple nous allons déduire α_n et β_n pour les modes TE.

a) *Déduction de α_n .* — En appliquant l'opérateur $\vec{d} \wedge$ à (I.33), on a

$$\begin{aligned} \vec{d} \wedge \vec{F}_n &= \frac{\mathbf{i} \omega \mu_0}{\gamma_n + k^2} [\nabla_t \wedge (\vec{k} \wedge \nabla_t H_{zn}) - \gamma \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \nabla_t H_{zn})] \\ &= -\mathbf{i} \omega \mu_0 \left(\frac{\gamma}{\gamma_n^2 + k^2} \nabla_t + \vec{k} \right) H_{zn}. \end{aligned}$$

Donc pour que (I.46) soit satisfaite, il faut $\alpha_n = \gamma/\gamma_n$.

b) *Déduction de β_n .* — On procède d'une façon analogue avec (I.44) :

$$\vec{d} \wedge \vec{G}_n = \frac{\gamma_n \gamma}{\gamma_n^2 + k^2} \vec{k} \wedge \nabla_t H_{zn} + \frac{\gamma_n}{\gamma} \vec{k} \wedge \nabla_t H_{zn}$$

et, compte tenu de (I.47) et (I.33),

$$\beta_n = \frac{\gamma_n \gamma_n^2 - \gamma^2 + k^2}{\gamma}.$$

On peut voir maintenant que les vecteurs de champ $\vec{G}_n(\vec{x})$ sont orthogonaux entre eux. Pour prouver ceci il suffit de faire usage de (I.46) et de l'identité vectorielle de Green ⁽³⁾ appliquée à $\vec{F}_n^T(\vec{x})$ et $\vec{F}_m(\vec{x})$,

$$\begin{aligned} \int_S dS [\omega^2 \mu_0^2 \vec{G}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{G}_m(\vec{x}) - k_m^2 \vec{F}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{F}_m(\vec{x})] = \\ = \omega^2 \mu_0^2 \int_S \vec{G}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{G}_m(\vec{x}) dS - k_m^2 \Lambda_n^2 \delta_{nm} = -i \omega \mu_0 \int dl (\vec{n} \wedge \vec{F}_n^T) \cdot \vec{F}_m = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(I.50) \quad \int_S \vec{G}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{G}_m(\vec{x}) dS = \lambda_n^2 \delta_{nm}.$$

L'ensemble du champ scalaire $\psi_n(\vec{x})$, défini par

$$(I.51) \quad (\vec{d} \cdot \vec{d} + \omega'^2) \psi_n(\vec{x}) = 0, \quad (\vec{n} \cdot \vec{d}) \psi_n(\vec{x}) = 0$$

permet la construction du deuxième type de modes normaux magnétiques. Le champ vectoriel

$$(I.52) \quad \vec{g}_n(\vec{x}) = \frac{1}{n} \vec{d} \psi_n(\vec{x})$$

fournit les solutions de (I.24) et (I.41) correspondant à $k_n^2 - \gamma^2 = 0$. En fait les deux conditions limites (I.41) sont satisfaites, la première identiquement, la deuxième comme résultat des conditions limites imposées à ψ_n . Les fonctions $\psi_n(\vec{x})$ forment un ensemble complet pour représenter les champs scalaires à dérivée normale nulle en l et, par conséquent, toutes les solutions de (I.24) associées à $k_n^2 = \gamma^2$ et les conditions limites (I.41) peuvent s'obtenir par superposition des champs vectoriels (I.52). Pour prouver que ces modes normaux sont orthogonaux, il suffit de répéter le procédé qui conduit à (I.30). Il en résulte

$$(I.53) \quad \int_S \vec{g}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{g}_m(\vec{x}) dS = \eta_n^2 \delta_{nm}$$

et aussi

$$(I.54) \quad \int_S \vec{G}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{g}_m(\vec{x}) dS = 0.$$

Les modes normaux magnétiques forment un ensemble complet pour représenter le champ vectoriel de vecteurs tangents à la périphérie l et dont le rotationnel est partout normal à l.

$$^{(3)} \int_S (\nabla^T \wedge \vec{A}^T) \cdot (\nabla \wedge \vec{B}) - \vec{A}^T \cdot \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{B} dS = \oint (\vec{A} \wedge \nabla \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} dl.$$

6. Développement des fonctions de Green magnétiques en modes normaux. —

Les équations intégrales pour les modes normaux magnétiques, équivalent à l'équation de définition (I.24) avec les conditions aux limites (I.41), sont

$$(I.55) \quad \vec{G}_n(\vec{r}) = (\gamma_n^2 - \gamma^2) \int_S \vec{M}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{G}_n(\vec{x}') dS',$$

$$(I.56) \quad \vec{g}_n(\vec{r}) = -k^2 \int_S \vec{M}^T(\vec{x}, \vec{x}') \vec{g}_n(\vec{x}') dS'.$$

Ce cas est en tout similaire à celui du paragraphe I.3. Les conditions aux limites sont implicitement contenues dans (I.55) et (I.56); on a, en effet,

$$(I.57) \quad \begin{aligned} \vec{n} \wedge [\vec{d} \wedge \vec{M}(\vec{x}, \vec{x}')] &= 0 \quad (\vec{x} \text{ en l}) \\ \vec{n} \cdot \vec{M}(\vec{x}, \vec{x}') &= -\frac{1}{k^2} \vec{d} \cdot [\vec{n} \wedge (\vec{d} \wedge \vec{M}(\vec{x}, \vec{x}'))] = 0. \end{aligned}$$

Le reste de la discussion qui conduit au développement des fonctions de Green magnétiques en modes normaux est identique au procédé exposé dans le paragraphe indiqué. Nous écrivons donc, sans donner d'autres détails,

$$(I.58) \quad \vec{M}^T(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_n \frac{\vec{G}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{G}_n(\vec{x}')}{(\gamma_n^2 - \gamma^2) \lambda_n^2} - \frac{1}{k^2} \sum_n \frac{\vec{g}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{g}_n(\vec{x}')}{\eta_n^2}.$$

Finalement, de ces développements on peut obtenir une relation entre les deux types de fonctions de Green :

$$(I.59) \quad \begin{aligned} \vec{d} \wedge \vec{N}(\vec{x}, \vec{x}') &= \sum_n \frac{k_n \vec{G}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{F}_n(\vec{x}')}{(\gamma_n^2 - \gamma^2) \Lambda_n^2}, \\ \vec{d}' \wedge \vec{M}(\vec{x}, \vec{x}') &= \sum_n \frac{k_n \vec{F}_n(\vec{x}') \cdot \vec{G}_n(\vec{x})}{(\gamma_n^2 - \gamma^2) \lambda_n}. \end{aligned}$$

7. Principes variationnels. — Les équations (I.20a) et (I.40) permettent d'écrire les équations intégrales du champ en fonction des modes normaux $\vec{F}_n$ et $\vec{G}_n$. Pour des raisons de symétrie dans les formules on introduit des nouveaux modes $\vec{E}_n$ et $\vec{H}_n$ définis comme il suit :

$$(I.60) \quad \vec{F}_n = (\beta_n)^{1/2} \vec{E}_n, \quad \vec{G}_n = (\alpha_n)^{1/2} \vec{H}_n.$$

Ainsi nous avons

$$(I.61) \quad \vec{E}(\vec{x}') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^e \vec{E}_n(\vec{x}')}{\gamma_n^2 - \gamma^2} + \frac{\omega^2 \mu_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\int \vec{f}_n^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS \right] \vec{f}_n(\vec{x}')}{\Omega_n^2} = \frac{J_0^e \vec{E}_0(\vec{x}')}{\gamma_0^2 - \gamma^2}.$$

En prenant le rotationnel,

$$(I.62) \quad \vec{H}(\vec{x}') + \frac{\mu' \vec{H}(\vec{x}')}{\mu_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n \beta_n)^{1/2} J_n^e}{\gamma_n^2 - \gamma^2} \vec{H}_n(\vec{x}') = \frac{(\alpha_0 \beta_0)^{1/2} J_0^e \vec{H}_0(\vec{x}')}{\gamma_0^2 - \gamma^2},$$

où

$$(I.63) \quad J_n^e = \frac{\omega^2 \mu_0}{\beta_n \Lambda_n^2} \left[\int \vec{E}_n^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS + (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int \vec{H}_n^T \cdot \mu' \vec{H} dS \right],$$

$$(I.64) \quad (J_n^e)^T = \frac{\omega^2 \mu_0}{\beta_n \Lambda_n^2} \left[\int \vec{E}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E}_n dS + (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int \vec{H}^T \cdot \mu' \vec{H}_n dS \right].$$

L'intégration étant étendue à la section droite du guide, (I.61) et (I.62) peuvent toujours s'écrire, sous forme opérationnelle,

$$(I.65) \quad \left(\vec{\mathcal{L}}_E - \frac{1}{\gamma_0^2 - \gamma^2} \vec{\mathcal{M}}_E \right) \vec{\varepsilon}' E = 0, \quad \left(\vec{\mathcal{L}}_H - \frac{1}{\gamma_0^2 - \gamma^2} \vec{\mathcal{M}}_H \right) \mu' \vec{H} = 0,$$

où maintenant ces nouveaux opérateurs sont :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_E &\equiv \vec{\varepsilon}'^{-1}(\vec{x}') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu_0 \vec{E}_n(\vec{x}')}{\beta_n \Lambda_n (\gamma_n^2 - \gamma^2)} \left[\int dS \vec{E}_n^T(\vec{x}) + \right. \\ &+ (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int dS \vec{H}_n^T(\vec{x}) \cdot \mu' \vec{H}(\vec{x}) \vec{E}^{-1}(\vec{x}) \vec{\varepsilon}'^{-1} \left. \right] - \frac{\omega^2 \mu_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\vec{x}')}{\Omega_n^2} \int dS \vec{f}_n^T(\vec{x}) \\ \vec{\mathcal{L}}_H &\equiv \mu'(\vec{x}') + \frac{1}{\mu_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu_0 \vec{H}_n(\vec{x}')}{\beta_n \Lambda_n^2 (\gamma_n^2 - \gamma^2)} \left[\int dS \vec{H}_n^T(\vec{x}) + \right. \\ &+ (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int dS \vec{E}_n^T(\vec{x}) \cdot \vec{\varepsilon}'^{-1} \vec{E}(\vec{x}) \vec{H}^{-1}(\vec{x}) \mu'^{-1}(\vec{x}) \left. \right], \\ \mathcal{M}_E &\equiv \frac{\omega^2 \mu_0 \vec{E}_0(\vec{x}')}{\beta_0 \Lambda_0^2} \left[\int dS \vec{E}_0^T(\vec{x}) + (\alpha_0 \beta_0)^{1/2} \int dS \vec{H}_0^T(\vec{x}) \cdot \mu' \vec{H}(\vec{x}) \vec{E}^{-1}(\vec{x}) \vec{\varepsilon}'^{-1} \right] \\ \text{et} \\ \mathcal{M}_H &\equiv \frac{\omega^2 \mu_0 \vec{H}_0(\vec{x}')}{\beta_0 \Lambda_0^2} \left[\int dS \vec{H}_0^T(\vec{x}) + \right. \\ &+ (\alpha_0 \beta_0)^{1/2} \int dS \vec{E}_0^T(\vec{x}) \cdot \vec{\varepsilon}'^{-1} \vec{E}(\vec{x}) \vec{H}^{-1}(\vec{x}) \mu'^{-1}(\vec{x}) \left. \right]. \end{aligned}$$

En écrivant les équations intégrales du champ adjoint,

$$(I.61') \quad \vec{E}^T(\vec{x}') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(J_n^e)^T \vec{E}_n^T(\vec{x}')}{\gamma_n^2 - \gamma^2} + \frac{\omega^2 \mu_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\int \vec{E}^T \cdot \vec{\varepsilon}'^{-1} \vec{f}_n dS \right] \cdot \vec{f}_n^T(\vec{x}')}{\Omega_n^2} = \frac{(J_0^e)^T \vec{E}_0^T(\vec{x}')}{\gamma_0^2 - \gamma^2},$$

$$(I.62') \quad \vec{H}^T(\vec{x}') + \frac{\vec{H}(\vec{x}') \mu'}{\mu_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n \beta_n)^{1/2} (J_n^e)^T}{\gamma_n^2 - \gamma^2} \vec{H}_n^T(\vec{x}') = \frac{(\alpha_0 \beta_0)^{1/2} (J_0^e)^T \vec{H}_0^T(\vec{x}')}{\gamma_0^2 - \gamma^2},$$

on constate que l'on peut aussi les écrire

$$(I.65') \quad \begin{aligned} &\left(\vec{\mathcal{L}}_E^T - \frac{1}{\gamma_0^2 - \gamma^2} \vec{\mathcal{M}}_E^T \right) \vec{\varepsilon}'^T \vec{E}^T = 0, \\ &\left(\vec{\mathcal{L}}_H^T - \frac{1}{\gamma_0^2 - \gamma^2} \vec{\mathcal{M}}_H^T \right) \mu' \vec{H}^T = 0, \end{aligned}$$

où les nouveaux opérateurs sont du type des précédents mais nous ne les écrivons pas ici pour simplifier la notation. Or (I.65) et (I.65') peuvent encore s'écrire

$$(I.66) \quad (\vec{\mathcal{L}} - \lambda \vec{\mathcal{M}}) \vec{\psi} = 0, \quad (\vec{\mathcal{L}}^T - \lambda \vec{\mathcal{M}}^T) \vec{\varphi} = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \vec{\psi} &\equiv (\vec{\varepsilon}'^{-1} \vec{E}, \mu' \vec{H}), \quad \vec{\varphi} \equiv (\vec{\varepsilon}'^T \vec{E}^T, \mu' \vec{H}^T), \\ \vec{\mathcal{L}} &\equiv \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{L}}_E & 0 \\ 0 & \vec{\mathcal{L}}_H \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{M}} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{M}}_E & 0 \\ 0 & \vec{\mathcal{M}}_H \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{1}{\gamma_0^2 - \gamma^2}. \end{aligned}$$

On peut de même vérifier facilement que

$$\int \vec{\varphi}(\vec{\mathcal{L}} \vec{\psi}) dS = \int (\vec{\mathcal{L}}^T \vec{\varphi}) \vec{\psi} dS$$

et

$$\int \vec{\varphi}(\vec{\mathcal{M}} \vec{\psi}) dS = \int (\vec{\mathcal{M}}^T \vec{\varphi}) \vec{\psi} dS.$$

Nous pouvons maintenant construire un principe variationnel pour la constante de propagation γ ou plus précisément pour $1/(\gamma_0^2 - \gamma^2)$. En effet, on sait [13, 14] que

$$(I.67) \quad [\lambda] = \int (\vec{\varphi} \vec{\mathcal{L}} \vec{\psi}) \vec{\psi} dS \Big/ \int (\vec{\varphi} \vec{\mathcal{M}} \vec{\psi}) \vec{\psi} dS$$

est un principe variationnel pour λ , paramètre des équations (I.66). En appliquant (I.67) on obtient pour la valeur propre $1/(\gamma_0^2 - \gamma^2)$ le principe variationnel

$$(I.68) \quad (\gamma_0^2 - \gamma^2) \omega^2 \mu_0 / \beta_0 \Lambda_0^2 = J_0^e (J_0^e)^T / D_0^e,$$

où

$$\begin{aligned} D_0^e = & \int \vec{E}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS + \frac{1}{\mu_0} \int \vec{H}^T \cdot \mu' \mu' \vec{H} dS + \\ & + \int \vec{H}^T \cdot \mu' \vec{H} dS - \frac{1}{\omega^2 \mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \Lambda_n^2 J_n^e (J_n^e)^T}{\gamma_n^2 - \gamma^2} + \\ & + \frac{\omega^2 \mu_0}{k^2} \sum \frac{\left[\int \vec{f}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS \right] \left[\int \vec{E}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{f}_n dS \right]}{\Omega_n^2}. \end{aligned}$$

D'une façon analogue, si l'on part des équations (I.20b) et (I.58), on a

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{x}') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^m \vec{H}_n(\vec{x}')}{\gamma_n^2 - \gamma^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int \vec{g}_n^T \cdot \mu' \vec{H} dS \right] \vec{g}_n(\vec{x}') = \frac{J_0^m \vec{H}_0(\vec{x}')}{\gamma_0^2 - \gamma^2}, \\ (I.69) \quad \frac{\vec{\varepsilon}' \vec{E}(\vec{x}')}{\varepsilon_0} + \vec{E}(\vec{x}') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n J_n^m \vec{E}_n(\vec{x}')}{\gamma_n^2 - \gamma^2} = \frac{\alpha_0 \beta_0 J_0^m \vec{E}_0(\vec{x}')}{\gamma_0^2 - \gamma^2}, \end{aligned}$$

où

$$J_n^m = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{\alpha_n \lambda_n^2} \left[\int \vec{H}_n^T \cdot \mu' \vec{H} dS + (\alpha_n \beta_n)^{1/2} \int \vec{E}_n^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS \right],$$

l'intégration étant étendue à la section droite du guide.

On obtient, en appliquant la même méthode, l'expression variationnelle

$$(I.70) \quad (\gamma_0^2 - \gamma^2) \omega^2 \varepsilon_0 / \alpha_0 \lambda_0^2 = J_0^m (J_0^m)^T / D_0^m,$$

où

$$\begin{aligned} (I.71) \quad D_0^m = & \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \vec{E}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS + \int_S \vec{E}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{E} dS + \int_S \vec{H}^T \cdot \mu' \vec{H} dS - \\ & - \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \lambda_n^2 J_n^m (J_n^m)^T}{\gamma_n^2 - \gamma^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\int_S \vec{g}_n^T \cdot \mu' \vec{H} dS \right] \left[\int_S \vec{H}^T \cdot \mu' \vec{g}_n dS \right]}{\gamma_n^2}. \end{aligned}$$

Ces principes variationnels ont été déduits pour la première fois par W. Hauser [8]. Nous avons voulu prouver, moyennant notre méthode opérationnelle, qu'ils

découlent tout simplement d'un principe variationnel très général tel que (I.67) sans aucune condition restrictive, d'où l'intérêt de ce développement.

II. Milieu gyroélectrique infini

Quoique notre objectif soit le problème des ondes guidées, il y a un certain nombre d'aspects de la théorie du milieu infini qui sont communs aux guides d'onde contenant des milieux gyroélectriques.

Soit le cas général où la direction de propagation $\vec{r}$ forme un angle θ avec la direction z du champ magnétique statique H_0 . On suppose $\vec{r}$ placé dans le plan xz . Tous les vecteurs du champ contiennent le terme $\exp(\mathbf{i} \omega t - \gamma r)$.

Les équations de Maxwell nous fournissent les relations suivantes entre $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$ et $\vec{D}$:

$$(II.1) \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\mathbf{i} \omega \vec{B}, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \mathbf{i} \omega \vec{D}.$$

Le milieu gyroélectrique ou plasma froid est caractérisé par sa permittivité $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ tensorielle

$$(II.2) \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\mathbf{i} \eta & 0 \\ \mathbf{i} \eta & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

et par sa perméabilité μ scalaire. On a

$$(II.3) \quad \vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

En écrivant les équations scalaires de (II.1),

$$(II.4) \quad \gamma \cos \theta E_y = -\mathbf{i} \omega \mu H_x,$$

$$(II.5) \quad -\gamma \cos \theta E_x + \gamma \sin \theta E_z = -\mathbf{i} \omega \mu H_y,$$

$$(II.6) \quad -\gamma \sin \theta E_y = -\mathbf{i} \omega \mu H_z,$$

$$(II.7) \quad \gamma \cos \theta H_y = \mathbf{i} \omega (\varepsilon_1 E_x - \mathbf{i} \eta E_y),$$

$$(II.8) \quad -\gamma \cos \theta H_x + \gamma \sin \theta H_z = \mathbf{i} \omega (\mathbf{i} \eta E_x + \varepsilon_1 E_y),$$

$$(II.9) \quad -\gamma \sin \theta H_y = \mathbf{i} \omega \varepsilon_2 E_z.$$

Des équations (II.7) et (II.9), (II.5) et (II.9), (II.4), (II.6) et (II.8), on tire

$$(II.10) \quad \mathbf{i} \omega \sin \theta (\varepsilon_1 E_x - \mathbf{i} \eta E_y) + \mathbf{i} \omega \varepsilon_2 \cos \theta E_z = 0,$$

$$(II.11) \quad \gamma^2 \sin \theta (\sin \theta E_z - \cos \theta E_x) + \omega^2 \varepsilon_2 \mu E_z = 0,$$

$$(II.12) \quad \mathbf{i} \omega^2 \eta \mu E_x + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \mu) E_y = 0.$$

Or pour que ce système ait une solution non triviale, il faut et il suffit que

$$(II.13) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} \omega \varepsilon_1 \sin \theta & \omega \eta \sin \theta & \mathbf{i} \omega \varepsilon_2 \cos \theta \\ -\gamma^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & \gamma^2 \sin^2 \theta + \omega^2 \varepsilon_2 \mu \\ \mathbf{i} \omega^2 \eta \mu & \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \mu & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui permet de calculer γ . Deux cas particuliers pour θ vont être considérés : champ magnétique dans le sens de la propagation ($\theta = 0$) et champ magnétique transversal ($\theta = 90^\circ$).

1. **Propagation dans le sens du champ magnétique statique.** — Si $\theta = 0$, l'équation (II.13) devient, après suppression du facteur $\sin \theta$,

$$(II.14) \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -\mathbf{i} \eta & \varepsilon_2 \\ -\gamma^2 & 0 & \omega^2 \varepsilon_2 \mu \\ \mathbf{i} \omega^2 \eta \mu & \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \mu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(II.15) \quad [\gamma^2 + \omega^2 \mu (\varepsilon_1 + \eta)] [\gamma^2 + \omega^2 \mu (\varepsilon_1 - \eta)] = 0.$$

Donc une solution est donnée par

$$(II.16) \quad \gamma = \pm \mathbf{i} \omega [\mu (\varepsilon_1 + \eta)]^{1/2}$$

et l'autre par

$$(II.17) \quad \gamma = \pm \mathbf{i} \omega [\mu (\varepsilon_1 - \eta)]^{1/2}.$$

La constante de propagation dans l'équation (II.16) est indiquée par γ_- tandis que celle de (II.17) est représentée par γ_+ ; la raison du choix du signe apparaîtra évidente dans la suite. De (II.15), on tire donc

$$(II.18) \quad \gamma_{\mp}^2 = -\omega^2 [\mu (\varepsilon_1 \pm \eta)]$$

et, en remplaçant γ^2 dans (II.12), on a, pour γ_- et γ_+ respectivement,

$$(II.19) \quad E_y = + \mathbf{i} E_x,$$

$$(II.20) \quad E_y = - \mathbf{i} E_x.$$

Dans le plan $z = 0$ la composante $E_{x(\gamma_{\pm})}$ a l'expression $E \exp(\mathbf{i} \omega t)$, tandis que $E_{y(\gamma_{\pm})}$ est du type $\pm \mathbf{i} E \exp(\mathbf{i} \omega t)$. Lorsqu'on prend les parties réelles du champ complexe on a

$$(II.21) \quad E_x = E \cos \omega t, \quad E_y = - E \sin \omega t$$

et

$$(II.22) \quad E_x = E \cos \omega t, \quad E_y = + E \sin \omega t,$$

à une constante près. Les équations (II.21) et (II.22) montrent que les champs sont polarisés circulairement. En prenant pour système de coordonnées un trièdre direct dont l'axe z est dirigé dans le sens du champ magnétique statique, on voit que (II.21) définit un vecteur champ qui tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre, tandis que (II.22) en définit un qui tourne dans le sens des aiguilles. Puisque η change de signe lorsque la direction de l'aimantation est renversée, il est évident que le sens de la polarisation circulaire doit être considéré par rapport à cette direction. Lorsque le champ électrique tourne dans le sens des aiguilles d'une montre regardée dans le sens du champ polarisateur, nous dirons que le sens de la polarisation circulaire est positif. Dans le cas contraire on parlera de polarisation circulaire négative. On parle aussi d'ondes respectivement positive et négative.

D'une façon tout à fait analogue au problème de propagation dans un milieu isotrope, on dit que le plasma froid présente une permittivité scalaire $\varepsilon_1 + \eta$ pour une onde polarisée négativement et une permittivité scalaire $\varepsilon_1 - \eta$ pour une onde polarisée positivement. (II.22) correspond au mode des sifflements.

2. **Effet Faraday.** — Une onde polarisée rectilignement dans un milieu gyroélectrique peut être considérée comme la somme d'une onde positive et d'une onde négative se propageant dans le même sens.

Comme on a pu le remarquer dans le paragraphe précédent, les ondes positive et négative ont des champs électriques uniformes et transverses à la direction de propagation. Comme résultat de cette uniformité, le comportement de ces ondes sera donné par celui du champ électrique dans le plan transverse. Choisissons un système de coordonnées cylindriques r, φ, z , orienté par rapport au système x, y, z de la façon indiquée par la figure 2.

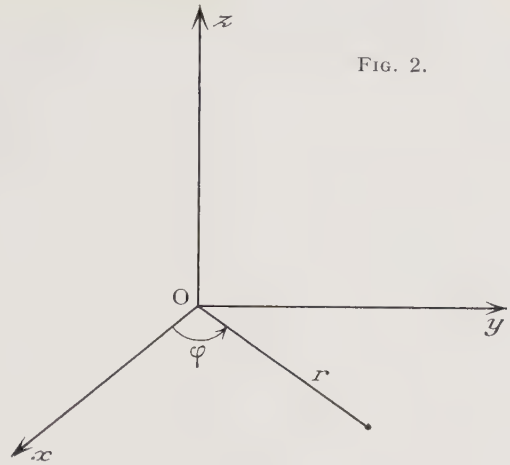


FIG. 2.

Les champs de ces ondes ont des composantes sur les axes x et y égales à

$$(II.23) \quad \begin{aligned} (E_x)_{+-} &= \frac{1}{2} E_{+-} \exp(i \omega t - \gamma_{+-} z), \\ (E_y)_{+-} &= i \frac{1}{2} E_{+-} \exp(i \omega t - \gamma_{+-} z). \end{aligned}$$

Si deux ondes, l'une positive, l'autre négative, de même amplitude sont excitées en $z = 0$, les composantes du champ électrique sont, par superposition ($E_{+-} = E_0$),

$$(II.24) \quad E_x = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega t} (e^{-\gamma_+ z} + e^{-\gamma_- z}), \quad E_y = i \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega t} (e^{-\gamma_+ z} - e^{-\gamma_- z}).$$

Si les deux ondes se propagent sans atténuation, ce qui est vrai pour un plasma sans collisions aux fréquences supérieures à la gyrofréquence électronique, le champ résultant est

$$(II.24') \quad E_x = \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega t} (e^{-i\beta_+ z} + e^{-i\beta_- z}), \quad E_y = i \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega t} (e^{-i\beta_+ z} - e^{-i\beta_- z})$$

et, par division,

$$(II.25) \quad E_y/E_x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta_+ - \beta_-) z.$$

L'équation (II.25) montre que la résultante des ondes polarisées circulairement est une onde linéaire, dont le plan de polarisation est $\varphi = 0$ pour $z = 0$. Le plan de polarisation tourne d'un angle $\frac{1}{2} (\beta_+ - \beta_-) z$ par unité de longueur dans le sens des z positives. Le sens de cette rotation est celui de la composante polarisée circulairement à plus grande vitesse de phase.

Dans un milieu dissipatif, l'onde résultante est polarisée linéairement au point d'excitation seulement (point $z = 0$). L'atténuation inégale des composantes circulaires produit un écart à la linéarité au fur et à mesure que l'onde se propage. En chaque point on aura une superposition d'une onde linéaire et d'une onde circulaire. Si l'on suppose que l'onde négative s'atténue plus que l'onde positive, l'équation (II.24) donne

$$(II.26) \quad E_x = E_0 e^{-\alpha_- z} \cos \frac{1}{2} (\beta_- - \beta_+) z \cos[\omega t - \frac{1}{2} (\beta_- + \beta_+) z] + \frac{1}{2} E_0 (e^{-\alpha_+ z} - e^{-\alpha_- z}) \cos(\omega t - \beta_+ z)$$

et

$$(II.27) \quad E_y = -E_0 e^{-\alpha_- z} \sin \frac{1}{2} (\beta_- - \beta_+) z \cos[\omega t - \frac{1}{2} (\beta_- + \beta_+) z] - \frac{1}{2} E_0 (e^{-\alpha_+ z} - e^{-\alpha_- z}) \sin(\omega t - \beta_+ z).$$

Les premiers membres de (II.26) et (II.27) donnent lieu à une onde linéaire dont le plan de polarisation est $\varphi = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)z$. La deuxième moitié représente une onde positive. Les équations (II.26) et (II.27) sont les équations paramétriques d'une ellipse et le champ est dit polarisé elliptiquement. Le grand axe de l'ellipse, d'orientation $\varphi = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)z$, définit le plan de polarisation de l'onde elliptique.

3. Propagation transversale à la direction du champ magnétique statique. Effet de la biréfringence. — Si dans l'équation (II.13), $\theta = 90^\circ$, le déterminant se simplifie et on a

$$(II.28) \quad \begin{vmatrix} i\omega\epsilon_1 & \omega\eta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 + \omega^2\epsilon_2\mu \\ i\omega^2\eta\mu & \gamma^2 + \omega^2\epsilon_1\mu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en effectuant les opérations indiquées,

$$(II.29) \quad -\epsilon_1(\gamma^2 + \omega^2\epsilon_2\mu)(\gamma^2 + \omega^2\epsilon_1\mu) + (\gamma^2 + \omega^2\epsilon_2\mu)\omega^2\mu\eta^2 = 0$$

et l'on a comme valeurs de γ :

$$(II.30) \quad \gamma = \pm i\omega(\epsilon_2\mu)^{1/2},$$

$$(II.31) \quad \gamma = \pm i\omega\mu \frac{\epsilon_1^2 - \eta^2}{\epsilon_1} = \pm i\omega(\epsilon_e\mu)^{1/2}.$$

On peut voir facilement que l'équation (II.30) définit la constante de propagation d'une onde pour E_x et E_y nulles, tandis que (II.31) définit la constante de propagation d'une onde dont E_z est nulle. Les ondes polarisées normalement et polarisées dans le sens du champ statique admettent des constantes de propagation différentes ; c'est le phénomène de la biréfringence.

De nouveau, par analogie avec la propagation des ondes planes dans un milieu isotrope, on peut dire que le milieu gyroélectrique présente une permittivité ϵ_e pour une onde polarisée dont les composantes de champ électrique sont normales à la direction de propagation. Cependant l'onde, au lieu d'être du mode TEM, correspond à un mode TE.

III. Guides d'onde circulaires

1. Equations du champ. — Le milieu gyroélectrique est disposé coaxialement dans le guide et soumis à un champ magnétique constant dirigé longitudinalement dans le sens de propagation.

Supposons pour l'instant qu'il s'agisse d'un guide d'onde cylindrique de forme quelconque. Soit z la direction du champ magnétique statique. Dans ces conditions le tenseur de permittivité est donné par (II.2).

Les inductions seront :

$$(III.1) \quad \vec{D} = \epsilon_1 \vec{E}_t + i\eta \vec{k} \wedge \vec{E}_t + \epsilon_2 E_z \vec{k}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

A partir des équations de Maxwell,

$$(III.2) \quad \nabla_t \wedge \vec{E} - \gamma \vec{k} \wedge \vec{E}_t = -i\omega\mu \vec{H}, \quad \nabla_t \wedge \vec{H} - \gamma \vec{k} \wedge \vec{H}_t = i\omega \vec{D};$$

or, compte tenu de $\nabla_t \wedge \vec{A} = \nabla_t \wedge \vec{A} + \nabla_t A_z \wedge \vec{k}$, on peut les écrire, en séparant la composante longitudinale,

$$(III.3a) \quad \nabla_t \wedge \vec{E}_t = -\mathbf{i} \omega \mu H_z,$$

$$(III.3b) \quad \nabla_t \wedge \vec{H}_t = \mathbf{i} \omega \varepsilon_2 E_z,$$

$$(III.3c) \quad -\gamma \vec{k} \wedge \vec{E}_t + \mathbf{i} \omega \mu \vec{H}_t = \vec{k} \wedge \nabla_t E_z,$$

$$(III.3d) \quad -\gamma \vec{k} \wedge \vec{H}_t - \mathbf{i} \omega \varepsilon_1 \vec{E}_t + \omega \eta \vec{k} \wedge \vec{E}_t = \vec{k} \wedge \nabla_t H_z;$$

en multipliant (III.3c) et (III.3d) vectoriellement à gauche par $\vec{k}$, on a

$$(III.4a) \quad \gamma \vec{E}_t + \mathbf{i} \omega \mu \vec{k} \wedge \vec{H}_t = -\nabla_t E_z,$$

$$(III.4b) \quad -\gamma \vec{H}_t + \mathbf{i} \omega \varepsilon_1 \vec{k} \wedge \vec{E}_t + \omega \eta \vec{E}_t = \nabla_t H_z.$$

Remplaçons maintenant dans (III.3d) le terme $\vec{k} \wedge \vec{H}_t$ donné par (III.4a) et dans (III.4b) le terme $\vec{H}_t$ donné par (III.3c), on trouve respectivement

$$(III.5a) \quad K_1^2 \vec{E}_t + \mathbf{i} k'^2 \vec{k} \wedge \vec{E}_t = \mathbf{i} \omega \mu \vec{k} \wedge \nabla_t H_z - \gamma \nabla_t E_z,$$

$$(III.5b) \quad K_1^2 \vec{k} \wedge \vec{E}_t - \mathbf{i} k'^2 \vec{E}_t = -\mathbf{i} \omega \mu \nabla_t H_z - \gamma \vec{k} \wedge \nabla_t E_z,$$

où $K_1^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \mu$, $k'^2 = \omega^2 \eta \mu$.

En éliminant E_t entre (III.4a) et (III.4b) et de même entre (III.3d) et (III.4a), on a

$$(III.5a') \quad K_1^2 \vec{H}_t + \mathbf{i} k'^2 \vec{k} \wedge \vec{H}_t = \\ = -\mathbf{i} \omega \varepsilon_1 \vec{k} \wedge \nabla_t E_z - \omega \eta \nabla_t E_z - \gamma \nabla_t H_z,$$

$$(III.5b') \quad K_1^2 \vec{k} \wedge \vec{H}_t - \mathbf{i} \omega^2 \eta \mu \vec{H}_t = \\ = \mathbf{i} \omega \varepsilon_1 \nabla_t E_z - \omega \eta \vec{k} \wedge \nabla_t E_z - \gamma \vec{k} \wedge \nabla_t H_z.$$

Finalement en multipliant (III.5a) par k^2 et (III.5b) par $\mathbf{i} k'^2$, en retranchant et en faisant les mêmes opérations pour (III.5a') et (III.5b'), on a respectivement :

$$(III.6a) \quad (K_1^4 - k'^4) \vec{E}_t = \\ = -\nabla_t (K_1^2 \gamma E_z + \omega \mu k'^2 H_z) + \mathbf{i} \vec{k} \wedge \nabla_t (k'^2 \gamma E_z + K_1^2 \omega \mu H_z),$$

$$(III.6b) \quad (K_1^4 - k'^4) \vec{H}_t = \\ = -\nabla_t (K_1^2 \gamma H_z + \omega \gamma^2 \eta E_z) + \mathbf{i} \vec{k} \wedge \nabla_t \{ \omega (\eta k'^2 - \varepsilon_1 K_1^2) E_z + \gamma k'^2 H_z \},$$

qui est l'expression des composantes transversales en fonction des composantes longitudinales du champ électromagnétique dans le milieu gyroélectrique.

A partir des équations de divergence $\nabla \cdot \vec{D} e^{-\gamma z} = 0$ et $\nabla \cdot \vec{B} e^{-\gamma z} = 0$, on a

$$(III.7a) \quad \nabla_t \cdot \vec{E}_t = \gamma \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_z + \omega \eta \frac{\mu}{\varepsilon_1} H_z$$

et

$$(III.7b) \quad \nabla_t \cdot \vec{H}_t = \gamma H_z.$$

En prenant la divergence des équations (III.6) compte tenu de (III.7), on arrive à

$$(III.8a) \quad \nabla_t^2 E_z + \omega \mu \frac{k'^2}{\gamma K_1^2} \nabla_t^2 H_z + \frac{K_1^4 - k'^4}{K_1^2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_z + \\ + \frac{(K_1^4 - k'^4) \omega \mu \eta}{K_1^2 \gamma \varepsilon_1} H_z = 0,$$

$$(III.8b) \quad \nabla_t^2 H_z + \omega \eta \frac{\gamma}{K_1^2} \nabla_t^2 E_z + \frac{K_1^4 - k'^4}{K_1^2} H_z = 0$$

et, en portant dans une de ces relations $\nabla_t^2 H_z$ ou $\nabla_t^2 E_z$ tiré de l'autre, on obtient les équations pour les composantes longitudinales :

$$(III.9) \quad \nabla_t^2 E_z + a E_z + b H_z = 0, \quad \nabla_t^2 H_z + c H_z + d E_z = 0,$$

où

$$a = K_1^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad b = \omega \mu \gamma \frac{\eta}{\varepsilon_1}, \quad d = -\omega \gamma \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad c = K_1^2 - \frac{k'^2 \eta}{\varepsilon_1}.$$

Les équations (III.9) montrent la complexité du problème relatif au milieu gyroélectrique. A la différence du milieu isotrope, dans un milieu gyroélectrique aimanté longitudinalement, on ne peut pas avoir affaire à des modes TE ou TM purs. En effet, l'annulation d'une composante longitudinale du champ entraîne l'annulation de l'autre comme le montre (III.9). On a affaire à des modes hybrides et à des modes TEM. Cependant on peut voir, par un raisonnement simple qui tient compte des conditions aux limites, que dans un guide d'onde qui contient un milieu gyroélectrique, les ondes TEM ne peuvent pas exister [4, 15]. Notons finalement que, suivant (III.9), pour qu'il y ait des modes non hybrides il faut et il suffit que $\gamma = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de propagation.

Finalement disons que l'application des conditions aux limites du plasma et sur la paroi du guide conduit à l'équation caractéristique que doit vérifier la constante de propagation du guide. Dans le cas du guide circulaire (fig. 3) ces conditions aux limites sont : la continuité des composantes du champ $E_z, H_z, E_\varphi, H_\varphi$ à la limite $r = r_1$ et les conditions $E_z = 0$ et $\partial H_z / \partial r = 0$ pour $r = r_0$ [3, 15].

2. Effet Faraday. — Lorsqu'on résout les équations (III.9) on obtient des solutions avec des facteurs en φ du type $\exp(\pm i n \varphi)$. Les champs électriques transverses, par exemple, sont de la forme ($\alpha = 0$)

$$(III.10) \quad \vec{E}_{t+} = \hat{E}_{t+} \exp[i(n\varphi - \beta_+ z)], \quad \vec{E}_{t-} = \hat{E}_{t-} \exp[i(-n\varphi - \beta_- z)].$$

Compte tenu de l'anisotropie, $\beta_+ \neq \beta_-$. Considérons le cas $n = 1$, $\hat{E}_{t+} = \hat{E}_{t-}$ et effectuons la superposition des ondes. Le champ électrique transverse est

$$\vec{E}_t = \hat{E}_t \{ \exp[i(\varphi - \beta_+ z)] + \exp[i(-\varphi - \beta_- z)] \}.$$

Pour $z = 0$,

$$(III.11) \quad \vec{E}_t(0) = 2 \hat{E}_t \cos \varphi.$$

Or dans les guides d'onde circulaires, le champ électrique périphérique est polarisé rectilignement car les conditions aux limites exigent $E_\varphi = 0$ pour $r = r_0$. La position du maximum du champ électrique est prise pour plan de polarisation. Ainsi pour $z = 0$ le plan de polarisation est $\varphi = 0$. Pour tout z , nous avons

$$(III.11') \quad E_t(z) = 2 \hat{E}_t \exp[-\frac{1}{2} i (\beta_- + \beta_+) z] \cos [\varphi + \frac{1}{2} (\beta_- - \beta_+) z].$$

Dans ce cas le plan de polarisation est donné pour chaque z par $\varphi = -\frac{1}{2} (\beta_- - \beta_+) z$ et la rotation Faraday par unité de longueur est

$$(III.12) \quad \Phi = \frac{1}{2} (\beta_+ - \beta_-).$$

Observons finalement qu'on peut appeler onde positive et onde négative les ondes (III.10). La polarisation du champ électrique diffère cependant de celle des ondes positive et négative du milieu infini (§ II.2). Pour les guides vides et pour les guides à milieu gyroélectrique ou gyromagnétique [5, 11], les ondes positives et les ondes négatives sont polarisées circulairement, positive et négative respectivement dans l'axe du guide seulement. Malgré cette restriction, on a trouvé que dans un milieu gyromagnétique (ferrites) la polarisation est presque circulaire dans la zone où le champ est plus intense [10].

3. **Milieu gyroélectrique dans une zone coaxiale de petit rayon.** — Soit r_0 le rayon de la section droite du guide et r_1 le rayon du tube à parois infiniment minces qui contient le milieu gyroélectrique (fig. 3). On a $r_0 \gg r_1$. Nous allons faire usage de la méthode des perturbations pour le calcul de la perturbation produite dans la constante de propagation par le milieu gyroélectrique.

En tenant compte de la forme du tenseur diélectrique (II.2), les valeurs de $\vec{P}$ et $\vec{M}$ de (I.2) sont facilement calculables. Ainsi, les formules (I.3) et (I.4) donnent :

$$\begin{aligned} \vec{M}_t &= (\mu - \mu_0) \vec{H}_t, & \vec{P}_t &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_t + \mathbf{i} \eta \vec{k} \wedge \vec{E}_t, \\ M_z &= (\mu - \mu_0) H_z, & P_z &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_z. \end{aligned}$$

L'équation (I.12) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \text{(III.13)} \quad \delta\gamma &= \left\{ \mathbf{i} \omega \int_{S'} \left[(\mu - \mu_0) \vec{H}_t \cdot \vec{H}_{tnm}^+ + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_t \cdot \vec{E}_{tnm}^+ + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_z E_{znm}^* + \mathbf{i} \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_{tnm}^+ \right] dS' \right\} / 2 \int_S (\vec{E}_{tnm} \wedge \vec{H}_{tnm}^+) \cdot \vec{k} dS. \end{aligned}$$

En l'absence de la perturbation on suppose l'existence du mode nm ; n indique la variation du champ avec φ et m sa variation avec r . Comme première approximation on peut supposer le milieu gyroélectrique plongé dans le champ non perturbé du guide. Dans le cas d'un guide d'onde circulaire soumis à un mode tel que $n = 1$, le champ peut être supposé uniforme pourvu que le plasma soit coaxial et r_1 petit. Si $|n| \neq 1$ le champ axial non perturbé est nul et il n'y a pas de perturbation du premier ordre.

Pour déterminer les champs intérieurs on suppose que le champ non perturbé est uniforme sur la surface S' et a pour valeur celle correspondant à l'axe ($r = 0$). On a

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{tnm} - (\vec{P}_t / 2 \varepsilon_0),$$

où $\vec{P}$ est la polarisation électrique. De la relation $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$ il résulte

$$\vec{P}_t = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_t + \mathbf{i} \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_t).$$

De même

$$\vec{H}_t = \vec{H}_{tnm} - (\vec{M}_t / 2 \mu_0), \quad \vec{M}_t = (\mu - \mu_0) \vec{H}_t.$$

De tout ceci, nous déduisons

$$\text{(III.14)} \quad \vec{E}_t = \frac{2 \varepsilon_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)^2 - \eta^2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) - \mathbf{i} \eta \vec{k} \wedge] \vec{E}_{tnm}$$

et

$$\text{(III.15)} \quad \vec{H}_t = \frac{2 \mu_0}{\mu + \mu} \vec{H}_{tnm}.$$

Pour déterminer $\delta\gamma$ à partir de (III.13), il faut exprimer les champs $\vec{H}_{tnm}$, $\vec{E}_{tnm}$ en fonction du rayon r_0 et de la fréquence ω en plus des constantes du milieu du

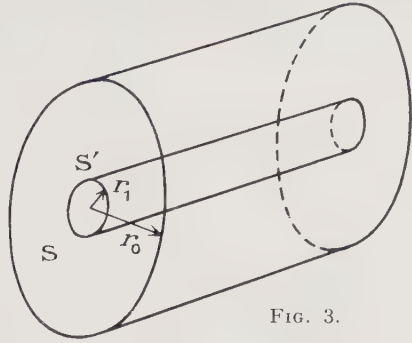


FIG. 3.

guide vide. Dans notre cas on suppose que celui-ci est l'air, par conséquent la perméabilité et la permittivité sont celles μ_0 et ε_0 de l'espace libre.

On a (toujours dans le cas $|n| = 1$), sur l'axe du guide et pour les modes TE,

$$\begin{aligned} H_{\text{rnm}} &= -\frac{\mathbf{i} \beta_0}{2 K} \mathbf{e}^{-\mathbf{i} n \varphi}, & E_{\text{rnm}} &= -\frac{n \omega \mu_0}{2 K} \mathbf{e}^{-\mathbf{i} n \varphi}, \\ H_{\varphi \text{nm}} &= -\frac{n \beta_0}{2 K} \mathbf{e}^{-\mathbf{i} n \varphi}, & E_{\varphi \text{nm}} &= \frac{\mathbf{i} \omega \mu_0}{2 K} \mathbf{e}^{-\mathbf{i} n \varphi}, \\ H_{z \text{nm}} &= 0, & E_{z \text{nm}} &= 0, \\ z &= 0, & K^2 &= \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta_0^2. \end{aligned}$$

En substituant dans (III.13) on a, pour les différents termes,

$$\begin{aligned} (\mu - \mu_0) \vec{H}_t \cdot \vec{H}_{\text{tnm}}^+ &= 2 \mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \vec{H}_{\text{tnm}} \cdot \vec{H}_{\text{tnm}}^+, & (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_z E_{z \text{nm}} &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_t \cdot \vec{E}_{\text{tnm}} &= \\ &= \frac{2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)^2 - \eta^2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \vec{E}_{\text{tnm}} \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ - \mathbf{i} \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\text{tnm}}) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+], \\ \mathbf{i} \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ &= \\ &= \frac{2 \mathbf{i} \eta \varepsilon_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)^2 - \eta^2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\text{tnm}}) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ - \mathbf{i} \eta \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+]; \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{tnm}} \cdot \vec{H}_{\text{tnm}}^+ &= \beta_0^2 / 2 K^2, & \vec{E}_{\text{tnm}} \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ &= \omega^2 \mu_0^2 / 2 K^2, \\ (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\text{tnm}}) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ &= -E_\varphi E_r^* + E_r E_\varphi^* = \mathbf{i} n \omega^2 \mu_0^2 / 2 K^2, \\ \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\text{tnm}}) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ &= -(\vec{E}_r^2 + \vec{E}_\varphi^2) = -\omega^2 \mu_0^2 / 2 K^2, \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$(III.16) \quad (\mu - \mu_0) \vec{H}_t \cdot \vec{H}_{\text{tnm}}^+ = \mu_0 \frac{\beta_0^2}{K^2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0},$$

$$\begin{aligned} (III.17) \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_t \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ &= \frac{2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)^2 - \eta^2} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \frac{\omega^2 \mu_0^2}{2 K^2} - \mathbf{i} \eta \frac{\mathbf{i} n \omega^2 \mu_0^2}{2 K^2} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \omega^2 \mu_0^2}{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)^2 - \eta^2] K^2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_0 + n \eta), \end{aligned}$$

$$(III.18) \quad \mathbf{i} \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ = \frac{-\eta \varepsilon_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)^2 - \eta^2} \left(\frac{\omega \mu_0}{K} \right)^2 [(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) n + \eta].$$

Lorsque $|n| = 1$, les intégrales $\int_S (\vec{E}_{\text{tnm}} \wedge \vec{H}_{\text{tnm}}^+) \cdot \vec{k} \, dS$ prennent la forme suivante pour les modes TE et TM respectivement :

$$(III.19, \text{TE}) \quad \int_S (\vec{E}_{\text{t1m}} \wedge \vec{H}_{\text{t1m}}^+) \cdot \vec{k} \, dS = \frac{1}{K^4} \pi \beta_0 \omega \mu_0 [(K r_0)^2 - 1] \mathbf{J}_1^2(K r_0),$$

$$(III.20, \text{TM}) \quad \int_S (\vec{E}_{\text{t1m}} \wedge \vec{H}_{\text{t1m}}^+) \cdot \vec{k} \, dS = \frac{1}{K^4} \pi \beta_0 \omega \varepsilon_0 (K r_0)^2 \mathbf{J}_1^2(K r_0);$$

en substituant (III.16) à (III.20) dans (III.13) il vient :

pour les modes TE,

$$(III.21) \quad \delta\gamma = \frac{i (K r_0)^2}{2 \beta_0 [(K r_0)^2 - 1] J_1^2(K r_0)} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \left(\beta_0^2 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - n \eta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 - n \eta} \right);$$

pour les modes TM,

$$(III.22) \quad \delta\gamma = \frac{i}{2 \beta_0 (K r_0)^2 J_1^2(K r_0)} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \left(\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} + \beta_0^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - n \eta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 - n \eta} \right).$$

De la forme des modes TE et TM il résulte que le champ transverse est polarisé circulairement sur l'axe dans le sens positif si $n = +1$ ou négatif si $n = -1$. Les équations (III.21) et (III.22) indiquent que lorsque le champ est polarisé dans le sens positif le plasma est caractérisé par une permittivité scalaire effective $\varepsilon_- = \varepsilon_1 - \eta$. Si le champ est polarisé dans le sens négatif, la permittivité scalaire effective est $\varepsilon_+ = \varepsilon_1 + \eta$. Nous avons vu dans le paragraphe II.2 que pour les ondes polarisées circulairement, seul le sens de la polarisation par rapport à la direction du champ magnétique statique détermine le signe dans $\varepsilon_1 \pm \eta$. Pour cette raison, la permittivité scalaire effective est différente pour les ondes polarisées circulairement possédant le même sens de polarisation par rapport à la direction de propagation, mais se propageant en directions opposées dans le guide d'onde. Il s'agit d'un système non réciproque.

Avec $\gamma = \alpha + i \beta$, $\mu = \mu' - i \mu''$, $\varepsilon = \varepsilon' - i \varepsilon''$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_0$, ... et

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - n \eta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 - n \eta} = \frac{\bar{\varepsilon}'_{\pm} - 1 + \bar{\varepsilon}''_{\pm} - 2 i \bar{\varepsilon}''_{\pm}}{(\bar{\varepsilon}'_{\pm} + 1)^2 + \bar{\varepsilon}''_{\pm}^2},$$

il résulte, pour la constante d'atténuation des modes TE,

$$\alpha_{\pm} = \frac{(K r_0)^2}{[(K r_0)^2 - 1] J_1^2(K r_0)} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \left[\beta_0 \frac{\bar{\mu}''}{(\bar{\mu}' + 1)^2 + \bar{\mu}''^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\beta_0} \frac{\bar{\varepsilon}''_{\pm}}{(\bar{\varepsilon}'_{\pm} + 1)^2 + \bar{\varepsilon}''_{\pm}^2} \right];$$

de même pour la constante de phase,

$$\delta\beta_{\pm} = \frac{(K r_0)^2}{2 [(K r_0)^2 - 1] J_1^2(K r_0)} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2 \left[\beta_0 \frac{\bar{\mu}'^2 + \bar{\mu}''^2 - 1}{(\bar{\mu}' + 1)^2 + \bar{\mu}''^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{\beta_0} \frac{\bar{\varepsilon}'_{\pm}^2 + \bar{\varepsilon}''_{\pm}^2 - 1}{(\bar{\varepsilon}'_{\pm} + 1)^2 + \bar{\varepsilon}''_{\pm}^2} \right].$$

4. Milieu gyroélectrique coaxial dans un champ magnétique faible. — Considérons maintenant un type différent de perturbation dans lequel le rayon de la baguette de plasma coaxial est arbitraire mais où la valeur des éléments du tenseur de permittivité est limitée du fait d'avoir un champ magnétique statique faible.

Avant de traiter le problème, il faudrait insister sur l'état non perturbé résultant de la suppression du champ statique H_0 .

Nous allons considérer le mode hybride TE_{nm} , TM_{nm} , où $|n| = 1$. Le plasma non aimanté se comporte comme un diélectrique de constantes ε_2 et μ . On a, partant des équations de Maxwell, les relations

$$(III.23) \quad K^2 \vec{E}_t = -i \omega \mu \vec{k} \wedge \nabla_t H_z - \gamma_0 \nabla_t E_z,$$

$$(III.24) \quad K^2 \vec{H}_t = -i \omega \varepsilon \vec{k} \wedge \nabla_t E_z - \gamma_0 \nabla_t H_z,$$

$$(III.25) \quad \nabla_t^2 H_z = -K^2 H_z,$$

$$(III.26) \quad \nabla_t^2 E_z = -K^2 E_z.$$

La solution des équations (III.25) et (III.26) est du type

$$(III.27) \quad \begin{cases} E_z = \frac{a}{Y_1(K r_0)} [Y_1(K r_0) J_1(K r) - J_1(K r_0) Y_1(K r)] & (r_1 < r < r_0) \\ H_z = \frac{b}{Y_1'(K r_0)} [Y_1'(K r_0) J_1(K r) - J_1'(K r_0) Y_1(K r)] \\ E_z = J_1(K_p r), \quad H_z = i \Lambda J_1(K_p r) & (0 < r < r_1) \end{cases}$$

où

$$K^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma_0^2, \quad K_p^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu + \gamma_0^2.$$

Avec ceci et les équations (III.23) et (III.24) on a, en exprimant la continuité des composantes E_z , H_z , E_φ et H_φ en $r = r_1$ [17],

$$(III.28) \quad -\frac{\gamma_0^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K_p^2} \right)^2 = \left[\mu \frac{F(K_p r_1)}{K_p^2} - \mu_0 \frac{R(K r_1)}{K^2} \right] \left[\varepsilon_2 \frac{F(K_p r_1)}{K_p^2} - \varepsilon_0 \frac{S(K r)}{K^2} \right],$$

où

$$\begin{aligned} F(x) &= x J_1'(x) / J_1(x), \\ R(K r_1) &= K r_1 \frac{J_1'(K r_1) Y_1'(K r_0) - J_1'(K r_0) Y_1'(K r_1)}{J_1(K r_1) Y_1'(K r_0) - J_1'(K r_0) Y_1(K r_1)}, \\ S(K r_1) &= K r_1 \frac{J_1'(K r_1) Y_1(K r_0) - J_1(K r_0) Y_1'(K r_1)}{J_1(K r_1) Y_1(K r_0) - J_1(K r_0) Y_1(K r_1)}. \end{aligned}$$

L'équation (III.27) est l'équation caractéristique du problème, permettant de calculer la constante de propagation lorsque le guide d'onde contient un diélectrique coaxial.

Nous allons maintenant traiter le cas où le champ magnétique statique est introduit dans le plasma. Dans ce cas on fait usage de la relation (I.12) (calcul des perturbations), qui s'écrit

$$(III.29) \quad \delta\gamma = \frac{i \omega}{2 \Delta_n} \int_0^{r_1} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \vec{E}_t \cdot \vec{E}_{tnm}^+ + i \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_{tnm}^+] r dr,$$

où

$$\Delta_n = \int_0^{r_1} (\vec{E}_{tnm} \wedge \vec{H}_{tnm}^+) \cdot \vec{k} r dr.$$

Le fait que le champ magnétique soit faible nous amène à pouvoir considérer comme petit le changement de permittivité exprimé par les termes η et $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Dans ces conditions, le champ perturbé peut s'identifier facilement au champ existant lorsqu'il s'agissait du diélectrique. Ecrivons sous la forme scalaire les relations (III.23) et (III.24) :

$$(III.23a) \quad E_r = \frac{1}{K_p^2} \left(\omega \mu \frac{n}{r} H_z - \gamma_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right),$$

$$(III.23b) \quad E_\varphi = \frac{i}{K_p^2} \left(\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} - \gamma_0 \frac{n}{r} E_z \right),$$

$$(III.24a) \quad H_r = -\frac{1}{K_p^2} \left(\omega \epsilon_1 \frac{n}{r} E_z + \gamma_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right),$$

$$(III.24b) \quad H_\varphi = -\frac{i}{K_p^2} \left(\omega \epsilon_1 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \gamma_0 \frac{n}{r} H_z \right).$$

On a

$$\int_0^{r_1} \vec{E}_{\text{tnm}} \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ r dr = \frac{1}{K_p^4} \left\{ (\omega^2 \mu \Lambda^2 + |\gamma_0|^2) \int_0^{r_1} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{E_z^2}{r^2} \right] r dr - \right. \\ \left. - 4 i \omega \mu \gamma_0 \Lambda n \int_0^{r_1} E_z \frac{\partial E_z}{\partial r} dr \right\},$$

$$\int_0^{r_1} (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\text{tnm}}) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ r dr = \frac{2}{K_p^4} \left\{ \omega \mu \gamma_0 \Lambda \int_0^{r_1} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{E_z^2}{r^2} \right] r dr + \right. \\ \left. + i n (\omega^2 \mu \Lambda^2 + |\gamma_0|^2) \int_0^{r_1} E_z \frac{\partial E_z}{\partial r} dr \right\},$$

où

$$\Lambda = \left[\frac{\epsilon_0}{K^2} S(K r_1) - \frac{\epsilon_2}{K_p^2} F(K_p r_1) \right] / \left[n \frac{\beta}{\omega} \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{K_p^2} \right) \right];$$

or, avec (III.27),

$$\int_0^{r_1} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{E_z^2}{r^2} \right] r dr = I_1 J_1^2(K_p r),$$

où

$$I_1 = \frac{1}{2} [(K_p r_1)^2 - 1] + \frac{1}{2} F^2(K_p r_1) + F(K_p r_1);$$

donc

$$(III.30) \quad \int_0^{r_1} \vec{E}_{\text{tnm}} \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ r dr = \\ = \frac{1}{K_p^4} J_1^2(K_p r_1) [(|\gamma_0|^2 + \omega^2 \mu \Lambda^2) I_1 - 2 i \gamma_0 n \Lambda \omega \mu],$$

$$(III.31) \quad \int_0^{r_1} (\vec{k} \wedge \vec{E}_{\text{tnm}}) \cdot \vec{E}_{\text{tnm}}^+ r dr = \\ = \frac{i}{K_p^4} J_1^2(K_p r_1) [n (|\gamma_0|^2 + \omega^2 \mu \Lambda^2) - 2 i \gamma_0 \Lambda \omega \mu I_1].$$

Passons maintenant au calcul de Δ_n . L'expression exacte de cette intégrale est assez compliquée, contenant des fonctions $R(K r_1)$ et $S(K r_1)$. Il est préférable de faire appel à nouveau au calcul des perturbations. En faisant usage de (I.12), calculons la variation subie par la constante de propagation lorsqu'il se produit un accroissement δr_1 du rayon r_1 du diélectrique coaxial de perméabilité μ_1 et de permittivité ϵ_2 .

$$(III.32) \quad \delta \gamma = r_1 \frac{i \omega \pi}{2 \Delta_n} \left\{ (\epsilon_2 - \epsilon_0) \left[|E_z|^2 + |E_\varphi|^2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} |E_r|^2 \right] + \right. \\ \left. + (\mu - \mu_0) \left[|H_z|^2 + |H_\varphi|^2 + \frac{\mu_1}{\mu_0} |H_r|^2 \right] \right\} dr_1,$$

où l'on a tenu compte de la continuité des composantes E_z , E_φ , H_z , H_φ et des relations $(E_r)_0 = (\varepsilon_2/\varepsilon_0) (E_r)_1$, $(H_r)_0 = (\mu_1/\mu_0) (H_r)_1$.

Il résulte des substitutions,

$$(III.33) \quad \Delta_n = i \frac{\omega r_1 J_1^2(K_p r_1)}{2 K_p^4 r_1^2 (\partial\gamma/\partial r_1)} \left\{ (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \left[K_p^4 r_1^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} [\omega \mu_1 n \Lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - i \gamma_0 F(K_p r_1)]^2 + [-i n \gamma_0 + \omega \mu_1 \Lambda F(K_p r_1)]^2 \right] + (\mu - \mu_0) \left[K_p^4 r_1^2 \Lambda + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_1}{\mu_0} [n \omega \varepsilon_2 - i \gamma_0 \Lambda F(K_p r)]^2 + [-i n \gamma_0 \Lambda + \omega \varepsilon F(K_p r)]^2 \right] \right\},$$

dont le calcul ne présente aucune difficulté, $\partial\gamma/\partial r$ pouvant être déterminé graphiquement. Finalement, en portant (III.30) à (III.32) dans (III.29), on a

$$(III.34) \quad \delta\gamma = r_1 \frac{\partial\gamma}{\partial r_1} \left\{ (\bar{\varepsilon}_1 - 1) [(|\bar{\gamma}_0|^2 + \bar{\mu} \bar{\Lambda}'^2) I_1 - 2 i \bar{\gamma}_0 n \bar{\Lambda} \bar{\mu}] - \right. \\ \left. - n \bar{\eta} \left[(\bar{\mu} \bar{\Lambda}'^2 + |\bar{\gamma}_0|^2) - 2 i \bar{\gamma}_0 \frac{\bar{\Lambda}}{n} \bar{\mu} I_1 \right] \right\} / \left\{ (\bar{\varepsilon}_2 - 1) [(\bar{\varepsilon}_2 \bar{\mu} + |\bar{\gamma}_0|^2) K_p^2 r^2 + \right. \\ \left. + \bar{\varepsilon}_2 [\bar{\mu} n \bar{\Lambda} - i \bar{\gamma}_0 F(K_p r_1)]^2 + [\bar{\mu} \bar{\Lambda} F(K_p r) - i n \bar{\gamma}_0]^2 + (\bar{\mu} - 1) [(\bar{\varepsilon}_2 \bar{\mu} + |\bar{\gamma}_0|^2)^2 K_p^2 r_1^2 + \right. \\ \left. + \bar{\mu} (n \bar{\varepsilon}_2 - i \bar{\gamma}_0 \bar{\Lambda} F(K_p r_1))^2 + (\bar{\varepsilon} F(K_p r_1) - i n \bar{\gamma}_0 \bar{\Lambda})^2] \right\},$$

où

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}_0 \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad \mu = \bar{\mu} \mu_0, \quad \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_0, \\ \eta = \bar{\eta} \varepsilon_0, \quad \Lambda = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \bar{\Lambda}, \quad \Lambda' = \sqrt{\varepsilon_0} \bar{\Lambda}.$$

Si nous appelons P et Q les coefficients respectifs de $\bar{\varepsilon}_1 - 1$ et $n \bar{\eta}$, (III.34) s'écrit $\delta\gamma = (\bar{\varepsilon}_1 - 1) P - n \bar{\eta} Q$.

(III.34) nous permet aussi de calculer la rotation Faraday. Si $\alpha = 0$ on a, par unité de longueur,

$$(III.35) \quad \Phi/l = \frac{1}{2} \{ [(\bar{\varepsilon}_1 - 1) P + \bar{\eta} Q] - [(\bar{\varepsilon}_1 - 1) P - \bar{\eta} Q] \} = \bar{\eta} Q.$$

5. Milieu gyroélectrique coaxial soumis à un champ magnétique d'intensité quelconque. — Ce développement que nous allons faire est valable pour des valeurs arbitraires du champ magnétique statique et pour toutes les valeurs possibles de r/r_0 pourvu que l'onde qui se propage soit presque polarisée circulairement dans toute la section droite du plasma [10].

On a vu dans le paragraphe II.1 que pour une aimantation longitudinale le plasma présente une permittivité $\varepsilon_1 \pm \eta$ pour une onde polarisée circulairement dans le sens négatif ou positif selon le signe $+$ ou $-$. Si le champ transverse était polarisé circulairement dans toute la section droite du guide à milieu gyroélectrique, la solution des équations (III.6) et (III.9) serait simple. Par exemple, les composantes E_z et H_z du champ dans le plasma ne dépendraient que d'un seul paramètre :

$$E_z = a_n J_n(K'_1 r) e^{in\varphi}, \quad H_z = b_n J_n(K''_1 r) e^{in\varphi}.$$

Si l'on suppose donc que l'onde est polarisée circulairement en première approximation dans tout l'intérieur du guide, on peut admettre que la constante de propagation pour un guide d'onde circulaire, muni d'une baguette idéale de permittivité transverse $\varepsilon_t = \varepsilon_1 - n \eta$ et de permittivité longitudinale ε_z , serait très

proche de celle d'un guide d'onde à plasma coaxial. Donc la perturbation due au changement de permittivité de $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - n \eta & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 - n \eta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i \eta & 0 \\ i \eta & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ serait valable pour de plus grandes intensités du champ magnétique que celles considérées dans le paragraphe précédent.

Tout d'abord il faut déterminer la constante de propagation γ_0 pour le guide d'onde circulaire qui contient une baguette coaxiale idéale de permittivité transverse ε_t et de permittivité longitudinale ε_2 . La perméabilité est toujours supposée isotrope et de valeur μ . Il résulte de tout cela une modification dans l'équation (III. 26). On a $\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_t \nabla_t \cdot \vec{E}_t - \gamma_0 \varepsilon_2 E_z = 0$, c'est-à-dire $\nabla_t \cdot \vec{E}_t = \gamma_0 (\varepsilon_2 / \varepsilon_t) E_z$ et, avec (III. 23),

$$(III. 26') \quad \nabla_t^2 E_z + K'^2 E_z = 0,$$

où $K'^2 = (\varepsilon_2 / \varepsilon_t) K'^2$ et $K'^2 = \omega^2 \varepsilon_t \mu + \gamma_0^2$.

En conséquence, l'équation caractéristique devient

$$(III. 36) \quad -\frac{n^2 \gamma_0^2 [(K' r_1)^2 - (K r_1)^2]^2}{\omega^2 [(K r_1)^2 - (K' r_1)^2]^2} = \\ = \left[\frac{\mu F(K' r_1)}{(K' r_1)^2} - \frac{\mu_0 R(K r_1)}{(K r_1)^2} \right] \left[\frac{\varepsilon_t F(K'' r_1)}{(K' r_1)^2} - \frac{\varepsilon_0 S(K r_1)}{(K r_1)^2} \right].$$

Passons maintenant au calcul de la perturbation $\delta\gamma$. L'équation (I. 12) s'écrit

$$(III. 37) \quad \delta\gamma = \frac{i \omega \pi}{\Delta_n} \int_0^{r_1} [(\varepsilon_0 - \varepsilon_t) E_t^2 + i \eta (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_t^+] r dr,$$

où

$$\Delta_n = \int_0^{r_0} (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{B}_t^+ r dr.$$

Or, si l'on tient compte de (III. 26') dans (III. 27) et qu'on porte ces valeurs dans (III. 23a) à (III. 24b), on a

$$(III. 38) \quad \begin{cases} E_r = -\frac{1}{K'^2 r} [i \omega \mu n \Lambda J_1(K' r) + \gamma_0 K'' r J_1(K'' r)], \\ E_\varphi = -\frac{1}{K'^2 r} [\omega \mu \Lambda K' r J_1'(K' r) - i \gamma_0 n J_1(K'' r)], \\ H_r = \frac{1}{K'^2 r} [\omega \varepsilon_t n J_1(K'' r) - i \gamma_0 \Lambda K' r J_1(K' r)], \\ H_\varphi = -\frac{1}{K'^2 r} [i \omega \varepsilon_t K'' r J_1'(K'' r) + \gamma_0 n J_1(K' r)]. \end{cases}$$

Il en résulte

$$E_t^2 = \frac{1}{K'^4} \left\{ (\omega \mu K' \Lambda)^2 \left[\frac{J_1^2(K' r)}{(K' r)^2} + J_1'^2(K' r) \right] + |\gamma_0|^2 K''^2 \left[\frac{J_1^2(K'' r)}{(K'' r)^2} + J_1'^2(K'' r) \right] + \right. \\ \left. + 2 i n \omega \mu \gamma_0 \frac{\Lambda}{r} \frac{d}{dr} J_1(K' r) J_1(K'' r) \right\},$$

$$(\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_t = \frac{2 i}{K'^4} \left\{ n (\omega \mu \Lambda)^2 \frac{K'}{r} J_1(K' r) J_1'(K' r) - i \omega \mu \gamma_0 \Lambda \left[K' K'' \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_1'(K' r) J_1(K'' r) + \frac{1}{r^2} J_1(K' r) J_1(K'' r) \right] + n |\gamma_0|^2 \frac{K''}{r} J_1(K'' r) J_1'(K'' r) \right\}$$

et l'on a

$$(III.39) \quad \int_0^{r_1} E_t^2 r \, dr = \frac{1}{K'^4} [(\omega \mu \Lambda)^2 I_1 + |\gamma_0|^2 I_2 - 2 \mathbf{i} n \omega \mu \gamma_0 \Lambda I_3],$$

$$(III.40) \quad \int_0^{r_1} (\vec{k} \wedge \vec{E}_t) \cdot \vec{E}_t r \, dr = \\ = \frac{\mathbf{i}}{K'^4} [n (\omega \mu \Lambda)^2 \mathbf{J}_1^2(y') + n |\gamma_0|^2 \mathbf{J}_1^2(y'') - 2 \mathbf{i} \omega \mu \Lambda \gamma_0 I_4],$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{J}_1^2(y') \left[\frac{1}{2} (y'^2 - 1) + \frac{1}{2} F^2(y') + F(y') \right], \\ I_2 &= \frac{1}{2} (y''^2 - 1) + \frac{1}{2} F^2(y'') + F(y''), \\ I_3 &= \mathbf{J}_1(y') \mathbf{J}_1(y'') \\ I_4 &= I_3 [F(y') y''^2 - F(y'') y'^2] / (y''^2 - y'^2) \\ y' &= K' r_1, \quad y'' = K'' r_1. \end{aligned}$$

Pour calculer Δ on suit le procédé employé dans le paragraphe précédent.

$$(III.41) \quad \Delta = -\mathbf{i} \frac{\omega \pi r_1}{(d\gamma/dr)_{r_1}} \left[(\varepsilon_t - \varepsilon_0) \left(|E_\varphi|^2 + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0} |E_r|^2 \right) + \right. \\ \left. + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_z^2 + (\mu - \mu_0) \left(|H_z|^2 + |H_\varphi|^2 + \frac{\mu}{\mu_0} |H_r|^2 \right) \right] = \frac{-\mathbf{i} \omega \pi}{K'^4 r_1 (d\gamma/dr)_{r_1}} \times \\ \times \left\{ (\varepsilon_t - \varepsilon_0) [(\omega \mu \Lambda y' \mathbf{J}_1'(y') - \mathbf{i} n \gamma_0 \mathbf{J}_1(y''))^2 + \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0} [n \omega \mu \Lambda \mathbf{J}_1(y') - \right. \\ \left. - \mathbf{i} \gamma_0 y'' \mathbf{J}_1'(y'')]^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \mathbf{J}_1^2(y'') (y')^2 + (\mu - \mu_0) [\Lambda^2 \mathbf{J}_1(y') y'^2 + \right. \\ \left. + (\omega \varepsilon_t y'' \mathbf{J}_1'(y'') - \mathbf{i} n \gamma_0 \Lambda \mathbf{J}_1(y'))^2 + \frac{\mu}{\mu_0} (n \omega \varepsilon_t \mathbf{J}_1(y'') - \mathbf{i} \gamma_0 \Lambda y' \mathbf{J}_1(y'))^2] \right\}.$$

En portant (III.39), (III.40) et (III.41) dans (III.37) on a finalement

$$(III.42) \quad \delta\gamma = \bar{\gamma} r_1 \left(\frac{d\gamma}{dr} \right)_{r_1} \left\{ n [(\bar{\mu} \bar{\Lambda})^2 I_1 + \bar{\beta}^2 I_2 - 2 \mathbf{i} n \bar{\mu} \bar{\gamma}_0 \bar{\Lambda} I_3] - \right. \\ \left. - [n \bar{\mu}^2 \bar{\Lambda}^2 \mathbf{J}_1^2(y') + n |\bar{\gamma}_0|^2 \mathbf{J}_1^2(y'') - 2 \mathbf{i} \bar{\mu} \bar{\Lambda} \bar{\gamma}_0 I_4] \right\} / \{ (\bar{\varepsilon}_t - 1) [\bar{\mu} \bar{\Lambda} y' \mathbf{J}_1'(y') - \\ - \mathbf{i} n \bar{\gamma}_0 \mathbf{J}_1(y'')]^2 + \bar{\varepsilon}_t [n \bar{\mu} \bar{\Lambda} \mathbf{J}_1(y') - \mathbf{i} \bar{\gamma}_0 y'' \mathbf{J}_1'(y'')]^2 + \\ + (\bar{\varepsilon}_2 - 1) \mathbf{J}_1^2(y'') (\bar{\varepsilon}_t \bar{\mu} + |\bar{\gamma}_0|^2) y'^2 + (\bar{\mu} - 1) [\Lambda^2 (\varepsilon_t \bar{\mu} + |\bar{\gamma}_0|^2) y'^2 + \\ + [\varepsilon_t y'' \mathbf{J}_1'(y'') - \mathbf{i} n \bar{\gamma}_0 \bar{\Lambda} \mathbf{J}_1(y')]^2 + \bar{\mu} [n \varepsilon_t \mathbf{J}_1(y'') - \mathbf{i} \bar{\gamma}_0 \bar{\Lambda} y' \mathbf{J}_1(y')]^2 \} \},$$

où $\varepsilon_t = \bar{\varepsilon}_t \varepsilon_0$.

IV. Guides d'onde rectangulaires

Le milieu gyroélectrique occupe l'espace d'une « lame » rectangulaire parallèle au petit côté du guide, étendue sur toute la hauteur du guide. Le champ magnétique constant est normal à la direction de propagation. On suppose le champ électromagnétique uniforme dans la direction du champ statique. Ceci permet de considérer seulement les modes TE_{n0} parmi les modes TE. Dans notre cas on tiendra seulement compte du mode fondamental TE_{10} du guide vide.

1. Equation transcendante pour une lame d'épaisseur quelconque. — Il s'agit de la configuration représentée dans la figure 4 où le champ statique est dirigé vers le haut. La permittivité du milieu gyroélectrique sera donnée par

$$(IV.1) \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & -i\eta \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ i\eta & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

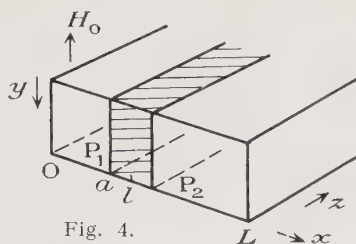


Fig. 4.

Le fait de l'uniformité du champ, variable dans la direction de H_0 , entraîne la séparation des modes en modes purement TE et en modes purement TM. Il suffit, pour le voir, d'imposer $\partial/\partial y = 0$ dans les équations de Maxwell,

$$(IV.2) \quad \nabla \wedge \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}, \quad \nabla \wedge \vec{H} = i\omega \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E}.$$

On a, pour une onde $\exp(i\omega t - \gamma z)$, les deux groupes d'équations scalaires :

$$(IV.3) \quad \gamma E_y = -i\omega \mu H_x,$$

$$(IV.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} E_y = -i\omega \mu H_z,$$

$$(IV.5) \quad \gamma H_x + \frac{\partial}{\partial x} H_z = -i\omega \varepsilon_2 E_y;$$

$$(IV.6) \quad \gamma E_x + \frac{\partial}{\partial x} E_z = i\omega \mu H_y,$$

$$(IV.7) \quad \gamma H_y = i\omega (\varepsilon_1 E_x - i\eta E_z),$$

$$(IV.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} H_y = i\omega (i\eta E_x + \varepsilon_1 E_z).$$

Il est évident que les équations (IV.3) à (IV.5) déterminent les propriétés des modes TE_{n0} , tandis que (IV.6) à (IV.8) caractérisent les modes TM_{n0} . On va considérer seulement les premiers.

Des équations (IV.3) et (IV.4) on tire

$$H_x = i\frac{\gamma}{\omega \mu} E_y, \quad H_z = i\frac{1}{\omega \mu} \frac{\partial}{\partial x} E_y$$

et, avec (IV.5),

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_2 \mu) E_y = 0,$$

équation pour E_y . Cette équation peut s'écrire sous forme abrégée

$$(IV.9) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + K_p^2 E_y = 0,$$

où

$$(IV.10) \quad K_p^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_2 \mu$$

et a comme solution générale

$$(IV.11) \quad E_y = A \sin(K_p x + \zeta).$$

Donc

$$(IV.12) \quad H_z = i\frac{A K_p}{\omega \mu} \cos(K_p x + \zeta).$$

L'impédance de l'onde sera

$$(IV.13) \quad \frac{E_y}{H_z} = -\frac{i \omega \mu}{K_p} \operatorname{tg}(K_p x + \zeta).$$

Dans le milieu extérieur,

$$(IV.14) \quad \frac{E_y}{H_z} = -\frac{i \omega \mu_0}{K} \operatorname{tg} K x$$

où

$$(IV.15) \quad K^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta_0^2.$$

On a, aux limites P_1 et P_2 respectivement,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{K} \operatorname{tg} \left[K_p \left(a - \frac{l}{2} \right) + \zeta \right] &= \frac{\mu_0}{K} \operatorname{tg} K \left(a - \frac{l}{2} \right), \\ -\frac{\mu}{K} \operatorname{tg} \left[K_p \left(a + \frac{l}{2} \right) + \zeta \right] &= \frac{\mu_0}{K} \operatorname{tg} K \left(a + \frac{l}{2} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left[(K_p a + \zeta) - \frac{K_p l}{2} \right] &= \frac{\mu_0}{\mu} \frac{K_p}{K} \operatorname{tg} K \left(a - \frac{l}{2} \right) = \psi_2, \\ \operatorname{tg} \left[(K_p a + \zeta) + \frac{K_p l}{2} \right] &= -\frac{\mu_0}{\mu} \frac{K_p}{K} \operatorname{tg} K \left(a + \frac{l}{2} \right) = \psi_1. \end{aligned}$$

Or, compte tenu de la relation

$$\operatorname{tg}[(A + B) - (A - B)] = \operatorname{tg} 2B = \frac{\operatorname{tg}(A + B) - \operatorname{tg}(A - B)}{1 + \operatorname{tg}(A + B) \operatorname{tg}(A - B)},$$

on a

$$(IV.16) \quad \operatorname{tg} K_p l = (\psi_1 - \psi_2)/(1 + \psi_1 \psi_2).$$

L'équation (IV.16) représente la forme générale de l'équation pour la constante de propagation des modes TE_{n0} dans un guide rectangulaire qui contient une lame de plasma aimanté transversalement. Son caractère transcendant oblige à faire usage des calculs numériques.

Il existe un cas particulièrement intéressant lorsque la lame est collée contre une face latérale du guide. Dans ce cas, $a = l/2$, donc $\psi_2 = 0$ et (IV.16) devient $\operatorname{tg} K_p l = \psi_1$, c'est-à-dire

$$(IV.17) \quad \operatorname{tg} K_p l + \frac{\mu_0}{\mu} \frac{K_p}{K} \operatorname{tg} K \delta = 0.$$

Pour terminer, remarquons que l'introduction de la lame de plasma perturbe le champ du guide vide et la validité de (IV.16) est limitée par ce fait.

2. Application de l'expression des perturbations aux lames minces. — Nous allons nous rapporter au problème précédent où nous admettrons que l est petit.

L'expression (I.12) devient

$$\begin{aligned} (IV.18) \quad \delta\gamma &= \frac{i \omega}{2 \Delta_n} \int_{S'} \{ (\mu - \mu_0) \tilde{H}_{tn}^+ \cdot \tilde{H}_t + (\mu - \mu_0) H_{zn}^* H_z + \\ &+ E_{xn}^* [(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_x - i \eta E_z] + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_{yn}^* E_y + E_{zn}^* [i \eta E_x + \\ &+ (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_z] \} dS = \frac{i \omega}{2 \Delta_n} \int_{S'} \{ (\mu - \mu_0) \tilde{H} \cdot \tilde{H}_n^* + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) (E_x E_{xn}^* + \end{aligned}$$

$$+ E_z E_{zn}^* - \mathbf{i} \gamma_1 (E_z E_{xn}^* - E_x E_{zn}^*) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_y E_{yn}^* \} dS.$$

Pour le calcul de $\delta\gamma$ il faut obtenir une valeur approchée du champ perturbé de l'intérieur du plasma. Si les modes perturbés sont les modes TE_{n0} , il faudra déterminer les champs H_x , H_z et E_y . L'approximation la plus simple à faire est de considérer les champs intérieurs résultant de l'introduction de la lame de plasma infinie dans le champ du mode non perturbé qu'on suppose uniforme dans la section droite du guide. Il vient

$$(IV.19) \quad E_x = E_{xn} - (N_x P_x / \varepsilon_0), \quad E_y = E_{yn} - (N_y P_y / \varepsilon_0).$$

Comme les champs sont uniformes dans la direction y , $N_y = 0$ et $N_x = 1$,

$$E_x = E_{xn} - (P_x / \varepsilon_0), \quad E_y = E_{yn};$$

de même,

$$(IV.20) \quad H_x = H_{xn} - (M_x / \mu_0), \quad H_z = H_{zn},$$

c'est-à-dire

$$H_x = H_{xn} - \frac{(\mu - \mu_0) H_x}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{\mu} H_{xn}.$$

En substituant dans (IV.18), il vient

$$\delta\gamma = \mathbf{i} \frac{\omega}{2 \Delta_n} \int_{S'} \left[(\mu - \mu_0) \left(\frac{\mu_0}{\mu} H_{xn} H_{xn}^* + H_{zn} H_{zn}^* \right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_{yn} E_{yn}^* \right] dS$$

et, compte tenu de

$$(IV.21) \quad \begin{cases} H_{xn} = (\gamma_0 / K) \sin Kx, \\ H_{yn} = 0, \quad E_{yn} = -(\mathbf{i} \omega \mu_0 / K) \sin Kx, \\ H_{zn} = \cos Kx, \end{cases}$$

où

$$K^2 = (n \pi / L)^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma_0^2,$$

on a

$$\delta\gamma = \frac{\mathbf{i} \omega}{2 \Delta_n} \int_{S'} \left[(\mu - \mu_0) \left(\frac{\mu_0}{\mu} \frac{|\gamma_0|^2}{K^2} \sin^2 Kx + \cos^2 Kx \right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\omega^2 \mu_0^2}{K^2} \sin^2 Kx \right] dS';$$

or

$$\Delta_n = \int_S (\vec{E}_{tn} \wedge \vec{H}_{tn}^+) \cdot \vec{k} dS = - \int_S E_{yn} H_{xn}^+ dS = - \frac{\mathbf{i} \omega \mu_0 \gamma_0}{2 K^2} L;$$

donc

$$(IV.22) \quad \delta\gamma = \frac{\mathbf{i} l}{L \gamma_0} \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} |\gamma_0|^2 \sin^2 Ka + K^2 \cos^2 Ka \right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \omega^2 \mu_0 \sin^2 Ka \right].$$

La constante de propagation du système perturbé est donc $\gamma_0 + \delta\gamma$. L'équation (IV.22) montre que la constante de propagation dépend seulement de l'élément ε_2 du tenseur de permittivité. Une caractéristique importante de (IV.22) est la réciprocité. En effet si γ_0 change de signe, $\delta\gamma$ le fait aussi. Si $\delta\gamma_+$ représente l'accroissement de la constante de propagation pour une onde qui se propage dans le sens positif des z et $\delta\gamma_-$ est l'accroissement correspondant pour le sens négatif,

on a

$$(IV.23) \quad |\delta\gamma_+ - \delta\gamma_-| = 0,$$

à la différence des milieux gyromagnétiques [5].

3. Application de la méthode variationnelle aux lames minces. — Nous allons

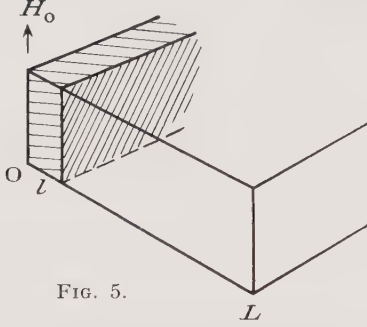


FIG. 5.

nous reporter à l'expression variationnelle (I.68) pour l'appliquer au cas particulier du paragraphe IV.2 où la lame est disposée contre une face du guide comme le montre la figure 5.

Nous allons tout d'abord fixer l'amplitude du champ par la condition

$$(IV.24) \quad \int_{S'} \vec{E}_0^T \cdot \vec{E} dS = \beta_0^{1/2} \Lambda_0^2,$$

où $\vec{E}_0$ est le champ électrique non perturbé.

Il est intéressant d'exprimer (IV.24) en fonction du paramètre J_0^e . Pour cela nous allons trouver une expression pour J_n^e . Multiplions à gauche (I.61) par E_n^T et intégrons ; il en résulte, compte tenu de la valeur de J_n^e et des relations d'orthogonalité des modes,

$$(IV.25) \quad J_n^e = \frac{\gamma_n^2 - \gamma^2}{\beta_n \Lambda_n^2} \int_{S'} \vec{E}_n^T \cdot \vec{E} dS,$$

donc J_0^e devient, avec (IV.24),

$$(IV.26) \quad J_0^e = (\gamma_0^2 - \gamma^2) \beta_0^{-1/2}.$$

Si on introduit cette condition dans l'expression variationnelle (I.68), celle-ci devient

$$(IV.27) \quad (J_0^e)^T \beta_0^{1/2} \Lambda_0^2 = \omega^2 \mu_0 D_0^e.$$

Si le champ d'essai est, à une constante près, $\vec{E}_{\text{essai}} = A \vec{e}$, $\vec{H}_{\text{essai}} = A \vec{h}$, le principe variationnel (IV.27) nous donne pour expression de cette constante

$$(IV.28) \quad A = (j_0^e)^T / \mathcal{D}_0^e,$$

où $(j_0^e) = \int \vec{e}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \vec{F}_0 dS + \int \vec{h}^T \cdot \mu'(\alpha_0 \vec{G}_0) dS$ et $A^2 \mathcal{D}_0^e = D_0^e$.

Considérons le mode fondamental du guide ou mode TE_{10} :

$$\vec{F}_0 = \vec{E}_{10}, \quad \alpha_0 \vec{G}_0 = \vec{H}_{10}.$$

Pour une approximation de premier ordre, on choisit

$$(IV.29) \quad \vec{H}_{\text{essai}} = A \alpha_0 \vec{G}_0,$$

ce qui entraîne

$$(IV.30) \quad E_{\text{essai}} = A \frac{K^2 - \gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_0} \vec{F}_0$$

où $K = \pi/L$.

Avant de procéder au calcul de $\mathcal{D}_0^e$, observons que, puisque les champs sont indépendants de la coordonnée y , la fonction de Green satisfait tout simplement l'équation différentielle

$$(IV.31) \quad \vec{d} \wedge [\vec{d} \wedge \vec{N}(x, x')] - k^2 \vec{N}(x, x') = \vec{I} \delta(x - x'),$$

où

$$\vec{d} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} - \gamma \vec{k}.$$

Une telle fonction de Green dyadique est donnée par

$$(IV.32) \quad \vec{\vec{N}}(x, x') = \vec{\vec{N}}_1(x, x') + \vec{\vec{N}}_2(x, x') - \frac{1}{k^2} (\vec{d} \vec{d}' \vec{\vec{N}}_1 - \vec{d} \vec{d}' \vec{\vec{N}}_2),$$

avec

$$\vec{\vec{N}}_1 = \vec{I} N_1, \quad \vec{\vec{N}}_2 = -\vec{i} \vec{i} N_2 + \vec{j} \vec{j} N_2 + \vec{k} \vec{k} N_2$$

et les fonctions scalaires de Green introduites N_1 et N_2 doivent vérifier les conditions

$$\frac{d}{dx} N_1 = -\frac{d}{dx'} N_1, \quad \frac{d}{dx} N_2 = \frac{d}{dx'} N_2,$$

imposées par les conditions limites. On peut donc écrire

$$\vec{\vec{N}}(x, x') = \vec{\vec{N}}_1(x, x') + \vec{\vec{N}}_2(x, x') - \frac{1}{k^2} \vec{d} \vec{d}' (N_1 + N_2)$$

et, compte tenu de la relation vectorielle $\vec{d} \wedge \vec{d}' \wedge \vec{\vec{N}} = \vec{d} \vec{d}' \vec{\vec{N}} - d^2 \vec{\vec{N}}$, l'équation (IV.31) s'écrit

$$d^2 (\vec{\vec{N}}_1 + \vec{\vec{N}}_2) + k^2 (\vec{\vec{N}}_1 + \vec{\vec{N}}_2) = -\vec{I} \delta(x - x'),$$

ce qui permet à N_1 et N_2 de vérifier les équations

$$\frac{d^2}{dx^2} N_1 + K^2 N_1 = -\delta(x - x'), \quad \frac{d^2}{dx^2} N_2 + K^2 N_2 = 0,$$

où $K^2 = k^2 + \gamma^2$. Les solutions de ces équations sont

$$(IV.33) \quad \begin{aligned} N_1(x, x') &= -\frac{1}{2 K \sin K L} \begin{cases} \cos K(x - x' - L) & \text{pour } x > x' \\ \cos K(x - x' + L) & \text{pour } x < x' \end{cases} \\ N_2(x, x') &= \frac{1}{2 K \sin K L} \cos K(x + x' - L). \end{aligned}$$

Ces fonctions de Green vont nous permettre de calculer $\mathcal{D}_0^e$. En fait, il suffit de substituer (IV.33) dans

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^e &= \int \vec{e}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{e} \, dx + \int \vec{h}^T \cdot \mu' \vec{h} \, dx + \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \int \vec{h}^T \cdot \mu' \mu' \vec{h} \, dx - \omega^2 \mu_0 \int \int \vec{e}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{\vec{N}}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{e} \, dx \, dx' - \\ &- \frac{1}{\mu_0} \int \int \vec{h}^T \cdot \mu' \vec{d}' \wedge [\vec{d}^T \wedge \vec{\vec{N}}^T] \mu' \vec{h}^T \, dx \, dx' + i \omega \int \int \vec{e}^T \cdot \vec{\varepsilon}' [\vec{d}^T \wedge \vec{\vec{N}}]^T \, dx \, dx' - \\ &- i \omega \int \int \vec{h}^T \cdot \mu' \vec{d}' \wedge \vec{\vec{N}}^T \cdot \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{e} \, dx \, dx' + \frac{\omega^2 \mu_0}{(\gamma_0^2 - \gamma^2) \Lambda_0} j_0^e (j_0^e)^T. \end{aligned}$$

Au premier ordre et en supposant ε'_2 petit on obtient

$$(IV.34) \quad \mathcal{D}_0^e = -\left(\mu' + \frac{\mu'^2}{\mu_0}\right) \left(\frac{\gamma^2}{K^2} d_{11} - d_{22}\right),$$

où

$$d_{11} = \int_0^l \sin^2 K x \, dx, \quad d_{22} = \int_0^l \cos^2 K x \, dx.$$

En outre,

$$(IV.35) \quad (j_0^e)^T = -\mu' \left(\frac{\gamma^2}{K^2} d_{11} - d_{22} \right);$$

donc

$$(IV.36) \quad A = \frac{\mu'}{\mu' + (\mu'^2/\mu_0)}.$$

Pour obtenir la perturbation de la constante de propagation, on fait usage de (IV.26) que l'on écrit

$$(IV.37) \quad (\gamma_0^2 - \gamma^2) \frac{\Lambda_0^2}{\omega^2 \mu_0} = \int \vec{F}_0^T \cdot \vec{\varepsilon} \vec{E} dx + \int (\alpha_0 \vec{G}_0)^T \cdot \mu' \vec{H} dx$$

et, compte tenu de la valeur du champ d'essai et de A , on a finalement

$$(IV.38) \quad \gamma^2 - \gamma_0^2 = \frac{2 K^2}{L (\mu_0 + \mu')} \left[\left(\frac{\mu_0 \varepsilon'_2 + \mu' \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{\gamma^2}{K^2} - \frac{\mu_0 \varepsilon'_2}{\varepsilon_2} \right) d_{11} - \mu' d_{22} \right]$$

où il faut garder au maximum les termes du second ordre en l .

RÉFÉRENCES

- [1] C. H. PAPAS, Res. Rep. n° 4, California Inst. Technol., 1954.
- [2] P. S. EPSTEIN, *Rev. mod. Physics*, t. **28**, 1956, p. 3.
- [3] A. A. T. M. VAN TRIER, *Appl. sci. Res. [B]*, t. **3**, 1953, p. 305.
- [4] J. E. ETTER & L. GOLDSTEIN, Electric Electron. Res. Labo. AF19 (604) 524, Techn. Rep. n° 3.
- [5] H. SUHL & L. R. WALKER, *Bell Syst. techn. JI*, t. **33**, 1954, p. 1142.
- [6] H. GAMO, *Jl phys. Soc. Japan*, t. **8**, 1953, p. 175.
- [7] L. GOLDSTEIN, M. LAMPER & J. HENEY, *Phys. Review*, t. **82**, 1951, p. 956.
- [8] W. HAUSER, *Quart. appl. Math.*, t. **16**, 1958, p. 259.
- [9] J. SCHWINGER, Massachusetts Inst. Technol. Rad. Labo. Rep. 43-34, mai 1943.
- [10] P. J. B. CLARRICOATS, *Proc. Inst. Electric Electronics Engrs [B]*, t. **106**, 1959, p. 335.
- [11] F. E. BORGNIS & C. H. PAPAS, *Randwertprobleme der Mikrowellenphysik*, éd. Springer, Berlin, 1955.
- [12] P. M. MORSE & H. FESHBACH, *Methods of theoretical physics*, éd. McGraw-Hill, New York, 1953, t. 2.
- [13] L. CAIRÓ & T. KAHAN, *Variational techniques in electromagnetism*, éd. Blackie & Son; London, 1965, chap. 4.
- [14] T. KAHAN, G. RIDEAU & P. ROUSSOPOULOS, *Les méthodes d'approximation variationnelles dans la théorie des collisions atomiques et dans la physique des piles nucléaires*, Memorial Sc. math. n° 134, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1956, p. 48.
- [15] M. L. KALES, *Jl appl. Physics*, t. **24**, 1953, p. 604.
- [16] J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, éd. McGraw-Hill, New York, 1943.
- [17] S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic waves*, éd. D. van Nostrand, London, 1943.
- [18] N. MARCUVITZ, *The waveguide handbook*, éd. McGraw-Hill, New York, 1951.
- [19] T. KAHAN, *Physique des guides d'onde électromagnétiques*, Memorial Sc. phys. n° 52, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [20] L. CAIRÓ, *C. r. Ac. Sc.*, t. **250**, 1960, p. 4129.
- [21] B. LAX, K. J. BUTTON & L. M. ROTH, *Jl appl. Physics*, t. **25**, 1954, p. 1413.
- [22] L. GABARRE & L. CAIRÓ, *C. r. Ac. Sc.*, t. **249**, 1959, p. 1750.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	1
NOTATIONS	2
I. Méthodes d'approximation	4
1. Expression de la constante de propagation d'après le calcul des perturbations	4
2. Équations intégrales du champ électromagnétique	6
3. Modes normaux électriques	8
4. Développement des fonctions de Green électriques en modes normaux ..	11
5. Modes normaux magnétiques	12
6. Développement des fonctions de Green magnétiques en modes normaux ..	14
7. Principes variationnels	14
II. Milieu gyroélectrique infini	17
1. Propagation dans le sens du champ magnétique statique	18
2. Effet Faraday	18
3. Propagation transversale à la direction du champ magnétique statique. Effet de la biréfringence	20
III. Guides d'onde circulaires	20
1. Équations du champ	20
2. Effet Faraday	22
3. Milieu gyroélectrique dans une zone coaxiale de petit rayon	23
4. Milieu gyroélectrique coaxial dans un champ magnétique faible	25
5. Milieu gyroélectrique coaxial soumis à un champ magnétique d'intensité quelconque	28
IV. Guides d'onde rectangulaires	30
1. Équation transcendente pour une lame d'épaisseur quelconque	31
2. Application de l'expression des perturbations aux lames minces	32
3. Application de la méthode variationnelle aux lames minces	34

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

**« Micro-instabilité d'un système
magnétohydrodynamique à symétrie cylindrique.
Méthode des énergies ».**

Vu et approuvé :

Paris, le 5 mars 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

BERTHELOT	T Phys. fondamentale des hautes énergies (Orsay).	BOURREAU	Botanique.
BRICART	T Météorologie et phys. de l'atmosphère.	CURIE D.	Physique (M. G. P.).
M ^{me} ALBE-FESSARD	T Psychophysiologie.	DURAND-DELGA ..	Géologie.
FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay).	FRÉON	T Chimie organique (Orsay).
M. JULIA	T Etudes des Moléculaires naturelles complexes.	HELLER	T Physiologie végétale.
LENDER	T Biol. animale (S. P. C. N.), Orsay.	TORTRAT	T Calcul des probabilités.
MAGAT	Physico-chimie des radio-éléments.	CAILLEUX	Géologie (S. P. C. N.).
Mlle QUINTIN	T Electrochimie.	MAGNAN	T Physique (S. P. C. N.).
MONOD	T Chimie du métabolisme.	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appl. à la chim. théor. et à la phys. nucléaire.
BENOIT	T Physiol. anim. (Orsay).	M ^{lle} FOURCROY ...	Biol. végétale (S. P. C. N.).
DE POSSEL	T Analyse numérique.	M ^{me} CHOQUET-	
CHARLOT	T Chimie analytique.	BRUHAT	T Méc. analytique et méc. céleste.
HAISSINSKY	T Radiochimie.	Mlle VEIL	Physiologie générale.
LEMÉE	T Physiol. vég. B. M. P. V. (Orsay).	LWOFF	T Microbiologie.
GUÉRIN	T Chimie M. P. C. (Orsay).	SIESTRUNCK	T Méc. phys. et expérim.
CHATELET M.	T Chimie (P. C. B.).	LACOMBE	T Métallur. des métaux nucl.
JEAN	T Physique nucléaire (Orsay).	BROCHARD	T Physique P. C. B. (Orsay).
MATTLER	T Physique S. P. C. N.	CABANNES	T Mécanique générale.
MICHEL L.	Phys. théor. des htes énergies (Orsay).	LESIEUR	T Mathématiques M. P. C. (Orsay).
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).	MAZET	T Mécanique générale (Orsay).
BERTIN	T Electronique (Orsay).	CAIRE	Géographie phys. et géol. dynamique.
BOUSSIÈRES	Chimie des radioéléments (Orsay).	COMOLET	T Mécanique des Fluides.
M ^{me} COUTURE ...	T Thermodynamique et méc. physique.	CORABOEUF	Physiologie animale.
ELLENBERGER	T Géologie appli. s/le terr.	DELLOUE	Physique de l'exosphère.
FRANC	Biol. animale (P. C. B.).	GORENFLOT	Botanique II (Orsay).
SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay).	HOUILLOIN	Biologie animale P. C. B.
STOLKOWSKI	Physiologie générale.	JULLIEN J.	Chimie P. C. B.
ACHER	Chimie biol. (Orsay).	MALGRANGE	T Tech. math. de la phys.
BAUDOUIN	Biologie animale P. C. B.	OLIVIER	Antropologie.
BEAUMONT	Biologie animale S. P. C. N.	NOZERAN	T Botanique II (Orsay).
BLAMONT	T Géophysique Ionosphère.	BLANC-LAPIERRE ..	Physique E. N. S. (Orsay).
		CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay).
		KAHANE	T Mathématiques (Orsay).
		SAMUEL	T Math. E. N. S. féminines.
		KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay).
		THIRY	T Mécanique céleste.

Secrétaire général R. POULLAIN

